DUMITRU ONOSE

TOPOGRAFIE

MATRIX ROM
BUCUREȘTI

528.4/O-57

DUMITRU ONOSE

TOPOGRAFIE

UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DE CONSTRUCȚII BUCUREȘTI
BIBLIOTECĂ
Nr. Inv. 432593

MATRIX ROM
Bucureşti 2004

© MATRIX ROM
C.P. 16 - 162
77500 - BUCUREŞTI
tel. 01.4113617, fax 01.4114280
e-mail: matrix@fx.ro
www.matrixrom.ro

Editura MATRIX ROM este acreditată de
CONSILIUL NAŢIONAL AL CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE DIN ÎNVĂŢĂMÂNTUL SUPERIOR

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ONOSE, DUMITRU
Topografie / Dumitru Onose - Bucureşti:
Matrix Rom, 2004
Bibliogr.
ISBN 973-685-594-5

528.425

Coperta: arh. Iuliana Chiru
arh. Ciprian Onose

UNIVERSITATEA DE CONSTRUCŢII BIBLIOTECA
Nr. inv. 432595

ISBN 973 - 685 - 594 - 5

PREFAȚĂ

Această carte este, în primul rând, un manual universitar, destinat în special studenților Facultății de Geodezie din Universitatea Tehnică de Construcții București.

Lucrarea este utilă și altor studenți de la alte facultăți din Universitatea Tehnică de Construcții București sau de la alte universități din țară care frecventează cursuri de topografie, precum și specialiștilor din domeniul geodeziei care activează în sectorul de topografie.

Structura acestei cărți este astfel concepută încât să răspundă bunei desfășurări a procesului de învățământ și să ofere cititorului baza necesară pentru abordarea unor probleme care depășesc, prin amploare și dificultate, cadrul prelegerilor universitare.

Cursul a fost redactat astfel încât să se adapteze în mod corespunzător la nivelul de cunoștințe din domeniile analizei matematice, teoriei prelucrării măsurătorilor geodezice, matematicilor speciale, reprezentării suprafețelor topografice ale terenului, etc., pe care-l posedă studenții Facultății de Geodezie, nivel condiționat de planurile de învățământ actuale. Prin conținutul său, manualul clarifică noțiuni fundamentale și aplicative cu care se operează în cadrul altor discipline precum : geodezia, cartografia, topografia inginerească, determinarea deformațiilor construcțiilor, măsurătorile topografice subterane, cadastrul, etc., reprezentând cunoștințe de bază, absolut necesare pentru formarea unui inginer geodez.

Am avut grijă să prezint cât mai multe exemple practice rezolvate, cititorul, funcție de interesul său, alegându-le pe cele care satisfac scopul propus.

Manualul a fost analizat și avizat în Catedra de Topografie și Cadastru din Facultatea de Geodezie – Universitatea Tehnică de Construcții București – la data de 25 Martie 2003.

În încheiere aduc mulțumiri Societății Comerciale « **TOPCADEX–SRL** » București, care a susținut cu mare interes apariția acestui curs, precum și Editurii **MATRIX ROM** București pentru grija și promptitudinea de care a dat dovadă pentru ca această lucrare să apară în condiții tehnice corespunzătoare.

București,
Martie 2003.

Autorul

1. UTILIZAREA HĂRȚILOR ȘI PLANURILOR TOPOGRAFICE

1.1. *ELEMENTELE TOPOGRAFICE ALE TERENULUI*

1. PUNCTELE TOPOGRAFICE:

Punctele topografice sunt puncte din teren, materializate sau nu, care caracterizează poziția și forma detaliilor topografice (obiecte naturale sau artificiale din teren), sau concură la determinarea poziției altor puncte topografice.

2. GEOMETRIZAREA LINIILOR ȘI SUPRAFEȚELOR DIN TEREN:

Geometrizarea liniilor și suprafețelor din teren este operația de selectare judicioasă a unui număr minim de puncte topografice care să aproximeze cu suficientă fidelitate liniile - în cea mai mare parte sinuoase - din teren, atât în plan orizontal cât și în plan vertical, cu o linie poligonală, respectiv suprafețele ondulate ale terenului cu o suprafață poliedrică (fig. 1.1).

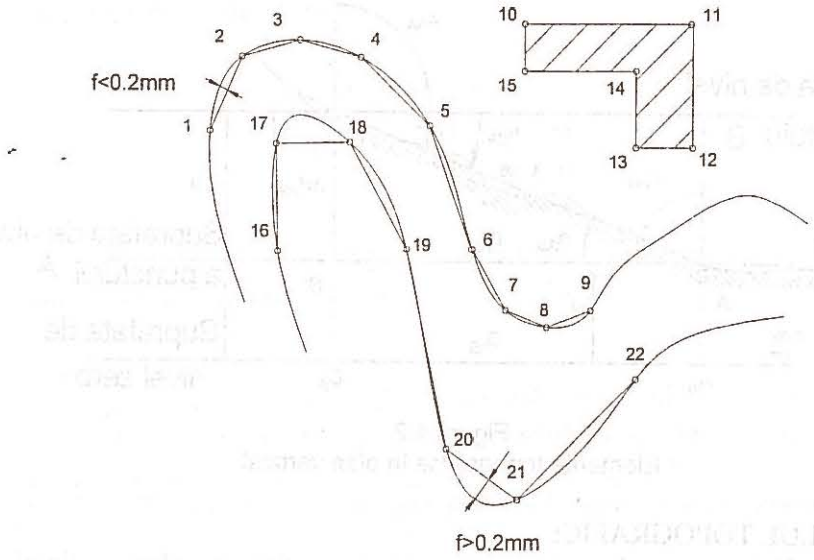


Figura 1.1 [26]
Geometrizarea liniilor în plan orizontal.
Geometrizare corectă pentru punctele 1-15,
necorespunzătoare pentru punctele 16-22

Densitatea punctelor de detaliu este cu atât mai mare cu cât scara planului, accidentația și sinuozitatea terenului sunt mai mari. Condiția care se impune este ca abaterea maximă f a liniei poligonale de la linia din teren să fie mai mică de 0,2 mm la scara planului.

În plan vertical, pentru redarea reliefului, în funcție și de accidentația terenului, se aleg puncte la cel mult 3 - 4 cm, pe plan, având grijă ca în teren să avem distanțe corespunzătoare, care se calculează funcție de scara planului.

3. ALINIAMENTUL:

Aliniamentul este urma intersecției suprafeței terenului cu un plan vertical ce trece prin două puncte topografice A și B. Dacă punctele A și B sunt apropiate (prin geometrizare în plan vertical), aliniamentul se poate aproxima cu dreapta ce unește aceste două puncte.

4. DISTANȚA ÎNCLINATĂ:

Distanța înclinată este lungimea dreptei din spațiu care unește două puncte topografice A și B (fig. 1.2).

$$L_{AB} = \overline{AB} \qquad (1.1)$$

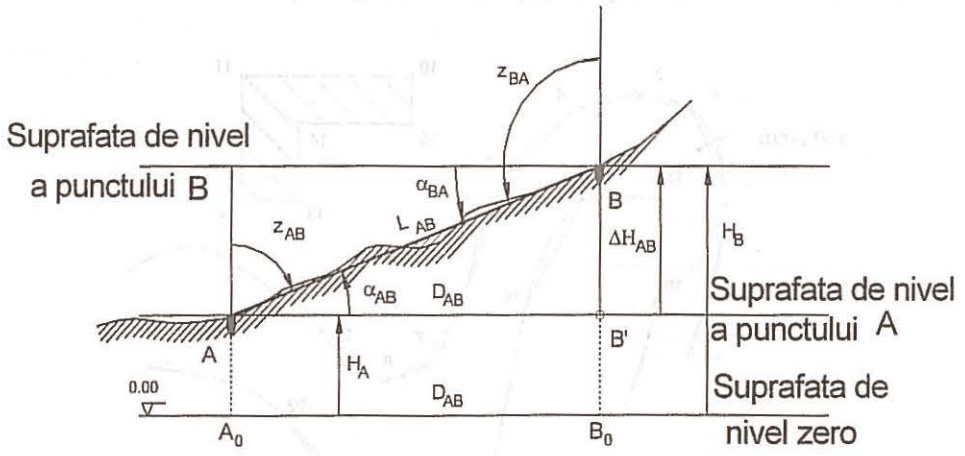


Figura 1.2
Elemente topografice în plan vertical

5. PROFILUL TOPOGRAFIC:

Profilul topografic este reprezentarea grafică în plan a liniei de intersecție între suprafața terenului și o suprafață verticală ce trece prin două sau mai multe puncte date. Se poate obține din măsurători în teren sau de pe plan.

6. SUPRAFAȚA DE NIVEL:

Suprafața de nivel este o suprafață normală în orice punct al ei la direcția gravității. Suprafața de nivel zero este aproximativ suprafața de echilibru a mărilor și oceanelor și se folosește ca suprafață de referință a altitudinilor (cotelor) în nivelment (fig. 1.2). În topografie, pe întinderi limitate, suprafețele de nivel pot fi considerate plane paralele orizontale; pe suprafețe mai mari se vor aproxima cu suprafețe sferice concentrice.

7. ALTITUDINEA (COTA):

Altitudinea este distanța verticală între suprafața de referință și suprafața de nivel a punctului considerat (fig. 1.2).

$$H_A = \overline{A_0A}$$
$$H_B = \overline{B_0B} \qquad (1.2)$$

8. DIFERENȚA DE NIVEL:

Diferența de nivel este distanța verticală între suprafețele de nivel a două puncte A și B (fig. 1.2).

$$\Delta H_{AB} = \overline{B'B} = H_B - H_A \qquad (1.3)$$

Aceasta poate fi pozitivă sau negativă, în funcție de altitudinile punctelor și sensul considerat, astfel dacă :

$$H_B > H_A \Rightarrow$$
atunci ; $$\Delta H_{AB} = H_B - H_A > 0 \qquad (1.4)$$
$$\Delta H_{BA} = H_A - H_B < 0$$

Cu ΔH se notează, de regulă, diferența de nivel determinată din valorile cotelor; diferențele de nivel măsurate se notează cu δH.

9. UNGHIUL VERTICAL:

Unghiul vertical este unghiul care măsoară înclinarea dreptei ce trece prin punctele A și B față de o dreaptă orizontală (α_{AB} – unghiul de pantă) sau față de o dreaptă verticală (z_{AB} – unghiul zenital), (fig. 1.2).
Unghiul vertical diferă ca mărime sau semn în funcție de sensul considerat:

$$\alpha_{BA} = -\alpha_{AB}$$
$$z_{BA} = 200^G - z_{AB} \qquad (1.5)$$

Relația între cele două tipuri de unghiuri este:

$$\alpha_{AB} + z_{AB} = \alpha_{BA} + z_{BA} = 100^G \qquad (1.6)$$

10. DISTANȚA ORIZONTALĂ:

Distanța orizontală este lungimea proiecției ortogonale a dreptei AB din spațiu pe un plan orizontal (fig. 1.2).

$$D_{AB} = \overline{A_0B_0} = \overline{AB'} \qquad (1.7)$$

Distanța orizontală se poate măsura direct sau se poate determina prin calcul dacă se cunosc (prin măsurare) lungimea înclinată și unghiul vertical sau lungimea înclinată și diferența de nivel, folosind relațiile:

$$\begin{aligned} D_{AB} &= L_{AB} * \cos\alpha_{AB} = L_{AB} * \sin z_{AB} \\ D_{AB} &= \sqrt{L_{AB}^2 - \delta H_{AB}^2} \end{aligned} \qquad (1.8)$$

11. UNGHIUL ORIZONTAL:

Unghiul orizontal este unghiul format de proiecțiile ortogonale a două drepte din teren SA și SB într-un plan orizontal; așadar acesta este deci unghiul diedru al planelor verticale ce trec prin SA și SB (fig. 1.3).

Direcțiile sunt tot unghiuri orizontale care au însă aceeași origine. Unghiurile orizontale se pot exprima ca diferențe a câte două direcții:

$$\omega_{AB} = \beta_B - \beta_A \qquad (1.9)$$

12. PANTA TERENULUI:

Panta terenului este înclinarea dreptei (ce unește două puncte A și B) față de un plan orizontal, exprimată prin raportul între diferența de nivel și distanța orizontală dintre cele două puncte (fig. 1.2):

$$p_{AB} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{AB'}} = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} \qquad (1.10)$$

De regulă, panta se mai exprimă în procente și la mie:

$$\begin{aligned} p_{AB}\,^{\circ}/_{\circ} &= 100 * p_{AB} \\ p_{AB}\,^{\circ}/_{\circ\circ} &= 1000 * p_{AB} \end{aligned} \qquad (1.11)$$

De fapt, panta terenului este tangenta unghiului vertical α:

$$p_{AB} = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} = tg\alpha_{AB} \qquad (1.12)$$

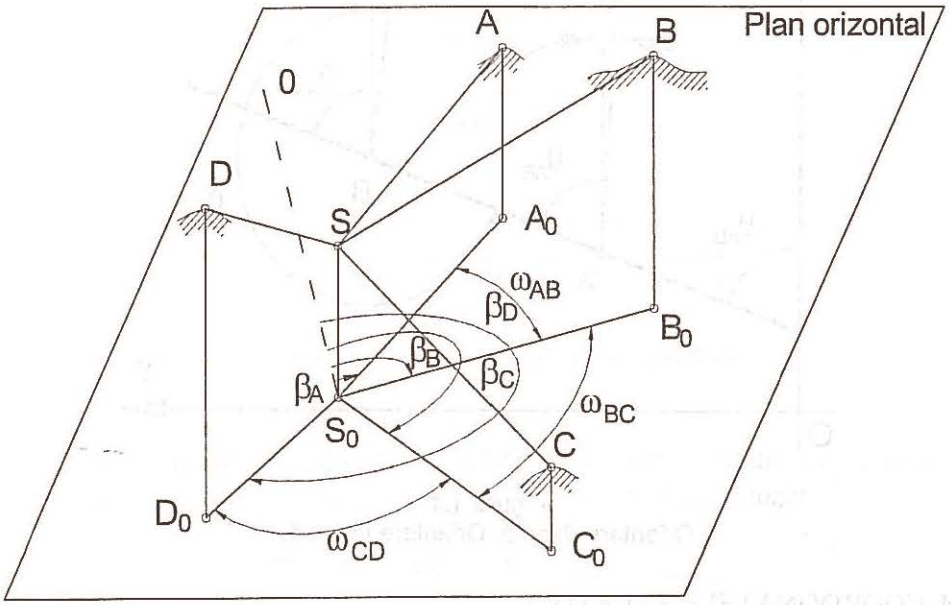


Figura 1.3
Unghi orizontal. Direcție.

13. ORIENTAREA:

Pentru două puncte A şi B orientarea laturii ce uneşte cele două puncte este unghiul orizontal format între axa sistemului de coordonate (care are direcția spre nord) şi latura AB, unghi măsurat în sens topografic (sens orar) cu originea pe direcția nord (fig. 1.4).

Pe suprafețe limitate ca întindere, direcțiile nord ale diverselor puncte sunt practic paralele între ele, unghiul de convergență ε a meridianelor putând fi neglijat.

Unghiul orizontal θ_{BA} se numeşte orientarea inversă a direcției AB şi:

$$\theta_{BA} = \theta_{AB} \mp 200^G \qquad (1.13)$$

Punctele A şi B din figură sunt de fapt proiecțiile într-un plan orizontal ale punctelor respective din spațiu.

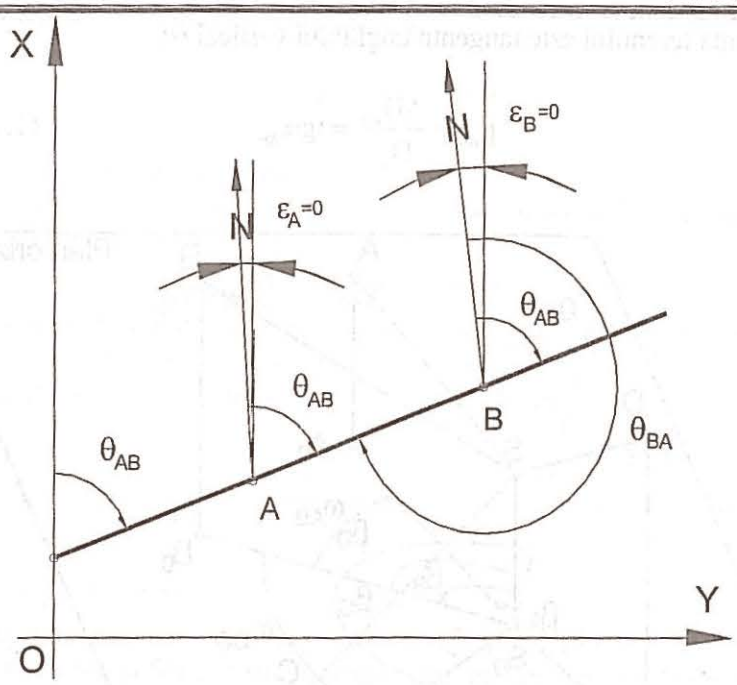


Figura 1.4
Orientare directă. Orientare inversă.

14. COORDONATELE RELATIVE:

Coordonatele relative sunt lungimile proiecțiilor pe axele Ox şi Oy a distanței orizontale între două puncte (fig. 1.5).

$$\begin{aligned} \Delta X_{AB} &= \overline{A_1B_1} = \overline{A_O1} \\ \Delta Y_{AB} &= \overline{A_2B_2} = \overline{A_O2} \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Se pot calcula din elemente măsurate, când se notează δX, δY, sau din coordonate absolute, ca diferențe şi se notează ΔX, ΔY:

$$\begin{aligned} \delta X_{AB} &= D_{AB} * \cos\theta_{AB} \\ \Delta X_{AB} &= X_B - X_A \\ \delta Y_{AB} &= D_{AB} * \sin\theta_{AB} \\ \Delta Y_{AB} &= Y_B - Y_A \end{aligned} \qquad (1.15)$$

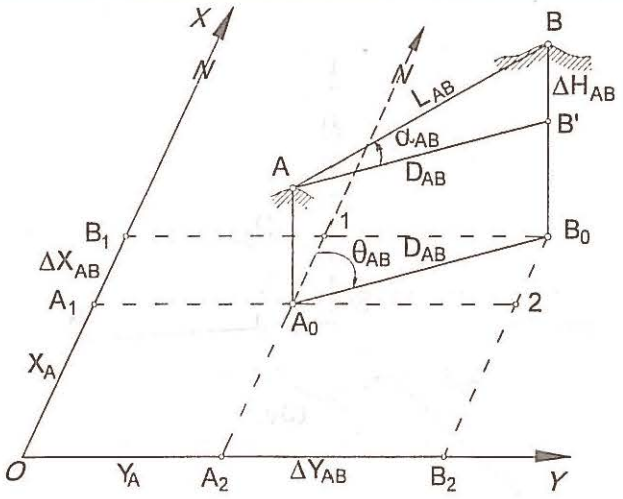


Figura 1.5
Coordonate rectangulare. Coordonate relative.

Cu ajutorul coordonatelor relative se pot calcula coordonatele rectangulare ale unui punct dacă se cunosc coordonatele altui punct:

$$X_B = X_A + \delta X_{AB} = X_A + D_{AB} * \cos\theta_{AB}$$
$$Y_B = Y_A + \delta Y_{AB} = Y_A + D_{AB} * \sin\theta_{AB} \qquad (1.16)$$

15. COORDONATELE RECTANGULARE:

Coordonatele rectangulare individualizează poziția în plan orizontal a punctelor topografice prin abscisa Y și ordonata X a proiecției punctelor în planul de referință. Orientarea axei OX din suprafața de referință este de regulă direcția nord.

Coordonatele rectangulare X_A și Y_A se mai numesc și coordonate absolute plane.

$$X_A = \overline{A_2A_0} = \overline{OA_1}$$
$$Y_A = \overline{A_1A_0} = \overline{OA_2} \qquad (1.17)$$

16. COORDONATELE POLARE:

Coordonatele polare sunt reprezentate de o distanță orizontală D_{SP} numită raza polară și un unghi orizontal ω_P numit unghiul polar (care definesc poziția unui punct P față de un alt punct S) și o direcție de referință (SA) dată (fig. 1.6).

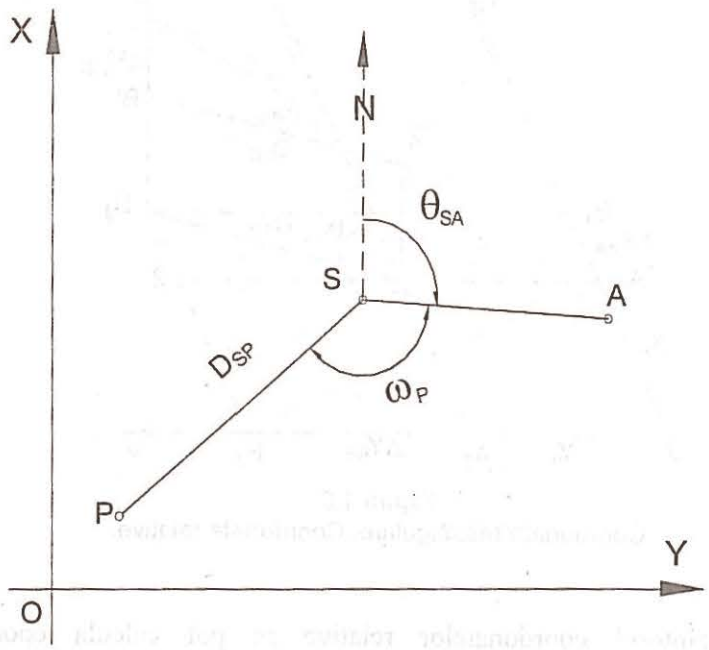


Figura 1.6
Coordonate polare

Cunoscând orientarea de referință θ_{SA} şi coordonatele rectangulare ale punctului S, se pot calcula coordonatele absolute ale lui P:

$$\begin{aligned} \theta_{SP} &= \theta_{SA} + \omega_P \\ X_P &= X_S + D_{SP} * \cos\theta_{SP} \\ Y_P &= Y_S + D_{SP} * \sin\theta_{SP} \end{aligned} \qquad (1.18)$$

17. COORDONATELE ECHERICE:

Coordonatele echerice sunt coordonate rectangulare într-un sistem local în care axa absciselor este materializată în teren (de regulă este o latură de drumuire). Elementele care individualizează poziția punctelor se măsoară direct în valoare orizontală, ordonata fiind lungimea perpendicularei, iar abscisa distanța de la un capăt al axei până la piciorul perpendicularei.

Uneori, dacă este necesar, coordonatele rectangulare ale punctelor echerice se vor calcula cu relațiile (fig. 1.7):

$$
\begin{aligned}
X_i' &= X_{201} + y_i * \cos\theta_{201-202} \\
X_i &= X_i' + x_i * \cos(\theta_{201-202} - 100^G) \\
Y_i' &= Y_{201} + y_i * \sin\theta_{201-202} \\
Y_i &= Y_i' + x_i * \sin(\theta_{201-202} - 100^G)
\end{aligned}
\qquad (1.19)
$$

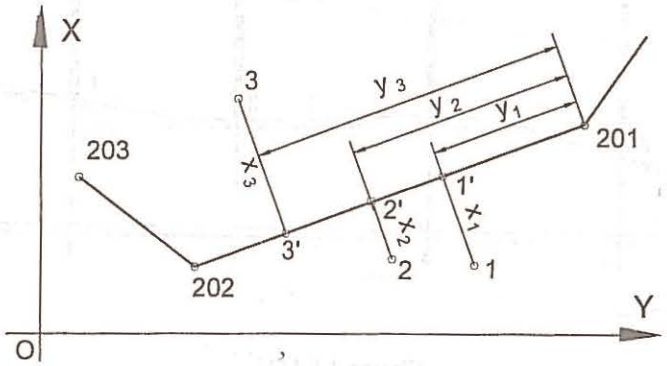


Figura 1.7
Coordonate echerice

1.2. *JALONAREA ALINIAMENTELOR*

A jalona un aliniament înseamnă a aşeza pe o linie o serie de jaloane care să fie în aliniament, adică într-un singur plan vertical ce trece prin două puncte finale A şi B ale aliniamentului [11].

De obicei jaloanele se aşează la o distanţa de 100-200 m unele de altele în teren plan şi la o distanţă de 20-100 m, într-o zonă cu pantă mare. Jalonarea aliniamentelor poate fi făcută din ochi, cu luneta teodolitului, sau cu ajutorul binoclului.

Jaloanele se pot înfige cu sabotul de fier de la capătul de jos, direct cu mâna în pământ, când terenul permite aceasta sau sunt sprijinite de trepiede speciale, astfel că nu mai necesită a fi ţinute vertical cu mâna. La jalonare, jaloanele se aşează în poziţie verticală, verticalitatea putând fi asigurată cu nivela sferică sau cu firul cu plumb.

Presupunem că trebuie jalonată linia AB, punctul B este vizibil din punctul A (fig. 1.8); dacă jalonarea se face vizual, un operator se aşează la 2 m în spatele jalonului A, iar alt operator, după indicaţiile primului operator, aşează succesiv jaloanele I, II, III, începând din capătul B al liniei, astfel ca ele să fie în aliniament cu jalonul din punctul B. Prin semne făcute cu mâna spre dreapta sau spre stânga, primul operator indică celui de-al doilea deplasarea jaloanelor, până ce pe rând toate jaloanele sunt aliniate. Dacă jaloanele sunt

aliniate, privind cu ochiul liber din O_1 şi O_2 în planul tangent la jaloane nu trebuie să apară nici un jalon care să nu fie cuprins între cele două linii paralele, obţinute prin proiecţia orizontală a, b.

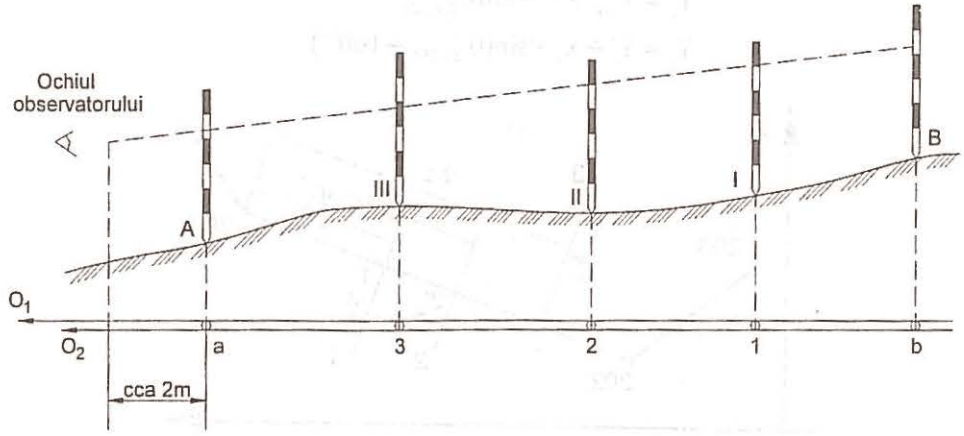


Figura 1.8 [11]
Jalonarea aliniamentului AB

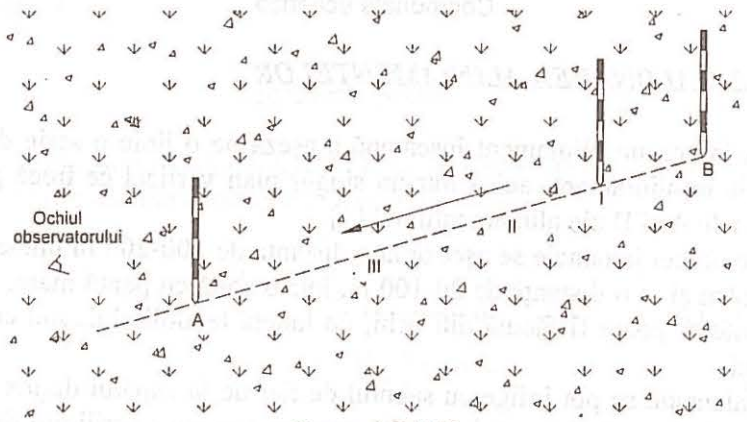


Figura 1.9 [11]
Jalonarea "spre sine"

Jalonarea care se face de la capătul îndepărtat al aliniamentului, se numeşte jalonare "spre sine" (fig. 1.9) şi este mai precisă decât jalonarea care se face de la capătul apropiat spre cel îndepărtat.

Jalonarea unui aliniament A-B (fig. 1.9), ale cărui capete sunt materializate cu jaloane, se execută aşezând pe rând jaloanele I, II şi III în aliniamentul A-B, privind din A.

Jalonarea unui aliniament ale cărui capete A şi B nu sunt accesibile sau când între ele există obstacole, (fig: 1.10 a, b, c) se execută de către doi

operatori cu jaloane care se așează între A și B în C_1 și D_1 (fig. 1.10 b) de unde sunt vizibile punctele A și B. Se aliniază jalonul din C_1 în direcția D_1A, apoi jalonul din D_1 în direcția C_1B, etc., până ce operatorul din C_3 vede jalonul B acoperit de jalonul D_4, iar operatorul din D_4 vede jalonul A acoperit de cel din C_3. Deoarece dreptele AC_3D_4 și C_3D_4B, au punctele C_3 și D_4 comune, punctele A, C_3, D_4, B sunt pe o dreaptă.

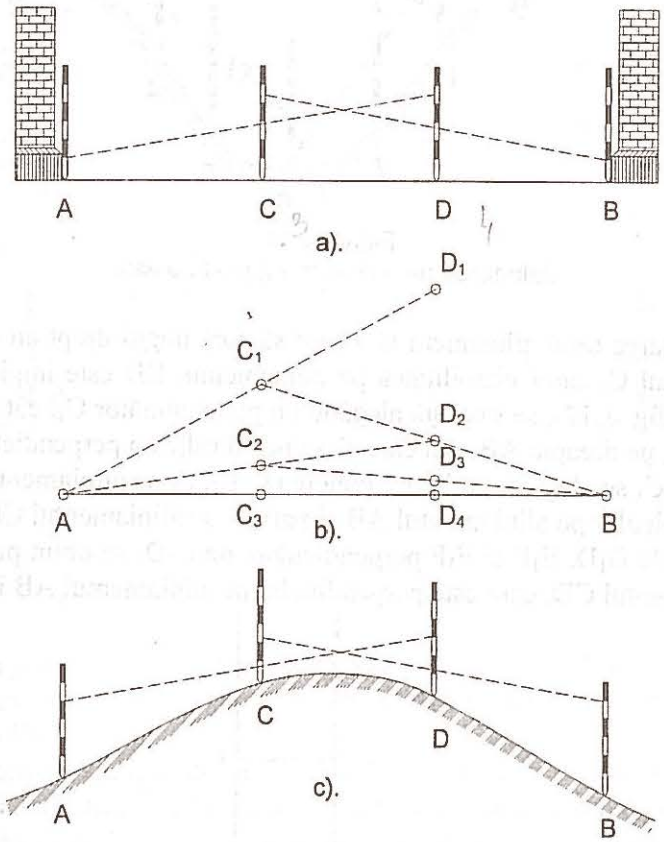


Figura 1.10 [11]
Jalonarea unui aliniament ale cărui capete nu sunt accesibile

Jalonarea aliniamentului AB (fig. 1.11) dacă acesta trebuie prelungit peste o vale adâncă se face astfel [11]: se aliniază pe râpă jalonul 1 al aliniamentului AB, se aliniază pe panta opusă jaloanele 2 și 3, se aliniază jalonul 4 în prelungirea aliniamentului 3-2, apoi pe aliniamentul 2-4 se așează jaloanele 5-6, iar în aliniamentul B-1, jaloanele 7 și 6.

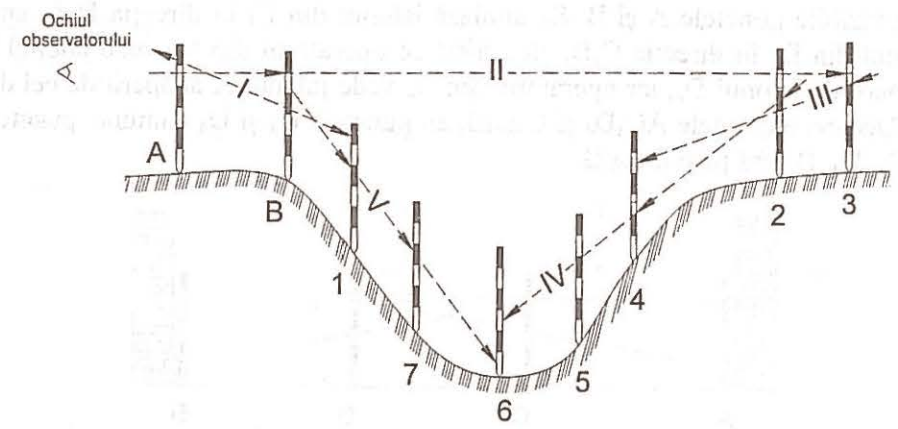


Figura 1.11
Jalonarea unui aliniament peste o vale

Jalonarea unui aliniament CD care să facă unghi drept cu aliniamentul AB în punctul C, când vizibilitatea pe aliniamentul CD este împiedicată de o construcție (fig. 1.12), se execută alegând un punct ajutător C_1, cât mai aproape posibil de C, pe dreapta AB, din care să se poată ridica o perpendiculară pe AB. Din punctul C_1 se aleg cel puțin trei puncte D_1, E_1, F_1 pe aliniamentul D_1C_1 care este perpendicular pe aliniamentul AB și paralel cu aliniamentul CD; măsurând apoi distanțele D_1D, E_1E și F_1F perpendiculare pe C_1D_1 se obțin punctele D, E, F pe aliniamentul CD, care este perpendicular pe aliniamentul AB în punctul C.

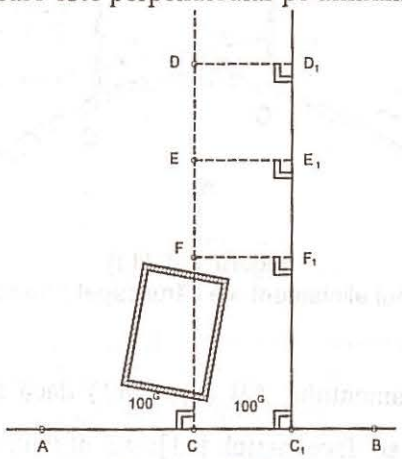


Figura 1.12 [11]
Jalonarea unui aliniament perpendicular pe aliniamentul AB

Determinarea pe teren a punctului de intersecție O a două aliniamente AB și CD (fig. 1.13), se face prin alinierea jalonului E, când pe aliniamentul

Determinarea pe teren a punctului de intersecție O a două aliniamente AB și CD (fig. 1.13), se face prin alinierea jalonului E, când pe aliniamentul CD, când pe aliniamentul AB, prin încercări succesive, până când jalonul E adus în punctul O, se găsește atât pe aliniamentul AB cât și pe aliniamentul CD.

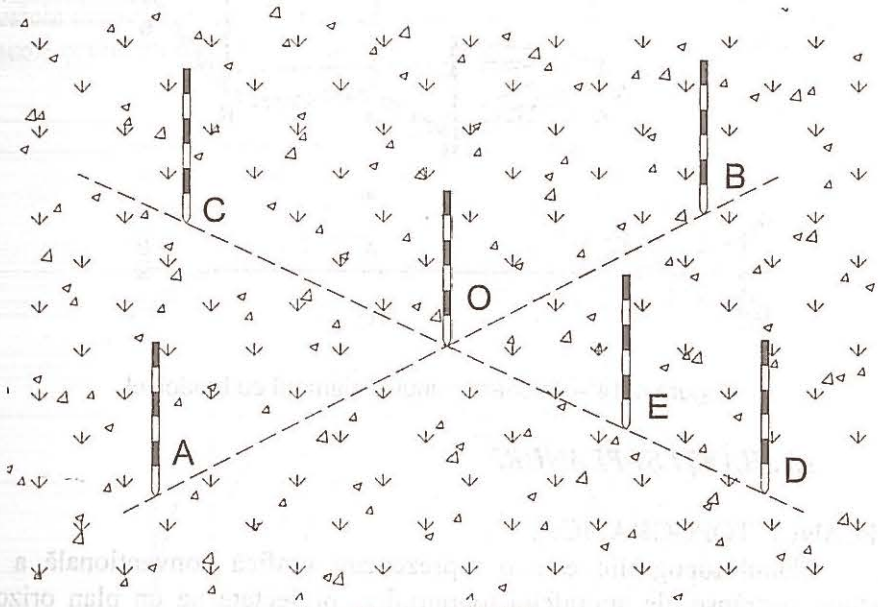


Figura 1.13 [11]
Determinarea intersecției a două aliniamente

Pentru jalonarea aliniamentelor cu precizie ridicată, alinierile făcute cu ochiul liber sau cu binoclul nu mai sunt satisfăcătoare și este necesară alinierea utilizând teodolitul.

La jalonarea aliniamentelor cu teodolitul se deosebesc două cazuri:

a. Trasarea aliniamentului AB (fig. 1.14a): cu teodolitul instalat în punctul A se vizează spre punctul B, având limbul și cercul alidad fixate, apoi se vizează punctele caracteristice de pe teren M, N, R. În jalonările precise nu este suficientă vizarea într-o singură poziție a lunetei [11], ci este necesară vizarea și în poziția a doua a lunetei. Dacă în a doua poziție a lunetei se obțin alte puncte M', N', R', atunci punctele căutate se vor obține la mijloc, între perechile de puncte ce au fost determinate pe teren, în cele două poziții ale lunetei.

b. Prelungirea aliniamentului AB: cu teodolitul așezat în A cu luneta în poziția întâi se vizeaza punctul B, se dă luneta peste cap și pe direcția obținută se pichetează punctul P_1, se repetă operația în poziția a doua a lunetei și se pichetează punctul P_2; punctul P aflat la mijloc între P_1 și P_2 este pe prelungirea

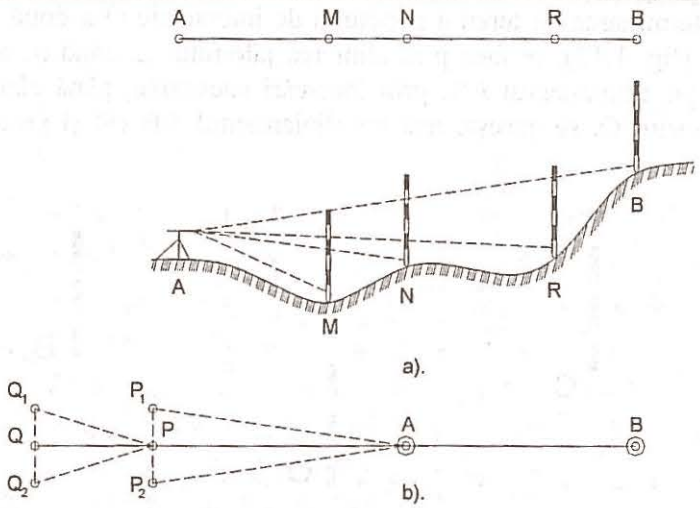


Figura 1.14 – Jalonarea unui aliniament cu teodolitul

1.3. *HĂRȚI ȘI PLANURI*

1. PLANUL TOPOGRAFIC:

Planul topografic este o reprezentare grafică convențională a unor porțiuni restrânse ale suprafeței topografice, proiectate pe un plan orizontal, micșorată la o anumită scară și care prin detaliile pe care le conține redă în mod fidel suprafața topografică respectivă. La întocmirea planurilor nu se ține cont de curbura pământului.

2. HARTA:

Harta este o reprezentare grafică convențională, micșorată la o anumită scară, în care este reprezentată întreaga suprafață a Pământului sau numai porțiuni din ea și în construcția căreia se ține seama de curbura pământului.

3. REPREZENTAREA FORMELOR DE RELIEF PE HARTĂ:

Înfățișările pe care le poate avea terenul, din punct de vedere al reliefului sunt nenumărate. Un topograf trebuie să cunoască formele de teren, punctele caracteristice ale reliefului, precum și principiile de reprezentare ale reliefului, pentru a putea să recunoască formele de teren pe hartă, să știe să rezolve pe hărți probleme de relief, să-și proiecteze lucrările pe hartă și să identifice pe teren punctele caracteristice pe care trebuie să le determine pentru a rezulta relieful [29].

Există multe sisteme prin care se poate reprezenta relieful, însă cel mai întrebuințat în lucrările inginerești este sistemul curbelor de nivel.

Prin curbă sau linie de nivel se înțelege proiecția, pe planul orizontal de referință, a liniei de contur ce rezultă din secționarea terenului cu o suprafață de nivel. Se știe că suprafețele de nivel sunt perpendiculare pe direcția gravitației și că pe porțiuni limitate pot fi asimilate cu planurile orizontale. Valoarea curbei de nivel este aceea a suprafeței de nivel de secționare, adică a înălțimii acesteia deasupra suprafeței de nivel zero, și această valoare se înscrie pe curbă. Uneori cotele sunt relative, adică nu se referă la suprafața de nivel zero.

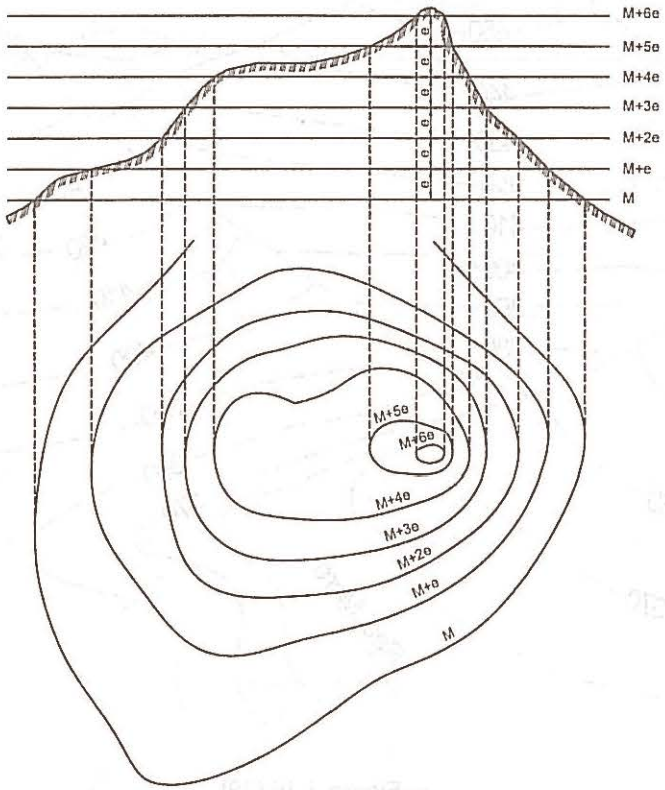


Figura 1.15 [29]
Principiul curbelor de nivel

Pentru ca reprezentarea reliefului terenului să fie unitară și înțelegerea formelor de teren după desen ușurată, se impune ca distanța pe înălțime dintre suprafețele de nivel de secționare, ce definesc curbele de nivel, să fie aceeași. Pentru acest motiv, această distanță se numește echidistanță (fig. 1.15). Facem precizarea că echidistanța numerică, spre deosebire de echidistanța grafică, care reprezintă distanța orizontală dintre două curbe de nivel succesive și care variază cu panta terenului, are aceași valoare între curbe de nivel succesive pe toată suprafața hărții.

Valoarea echidistanței numerice depinde de mai mulți factori: precizia ce se urmărește la reprezentarea reliefului, accidentația terenului și scara planului. Cu cât terenul este mai accidentat, echidistanța poate fi mai mare și cu cât scara planului este mai mare, echidistanța va fi mai mică (fig. 1.16).

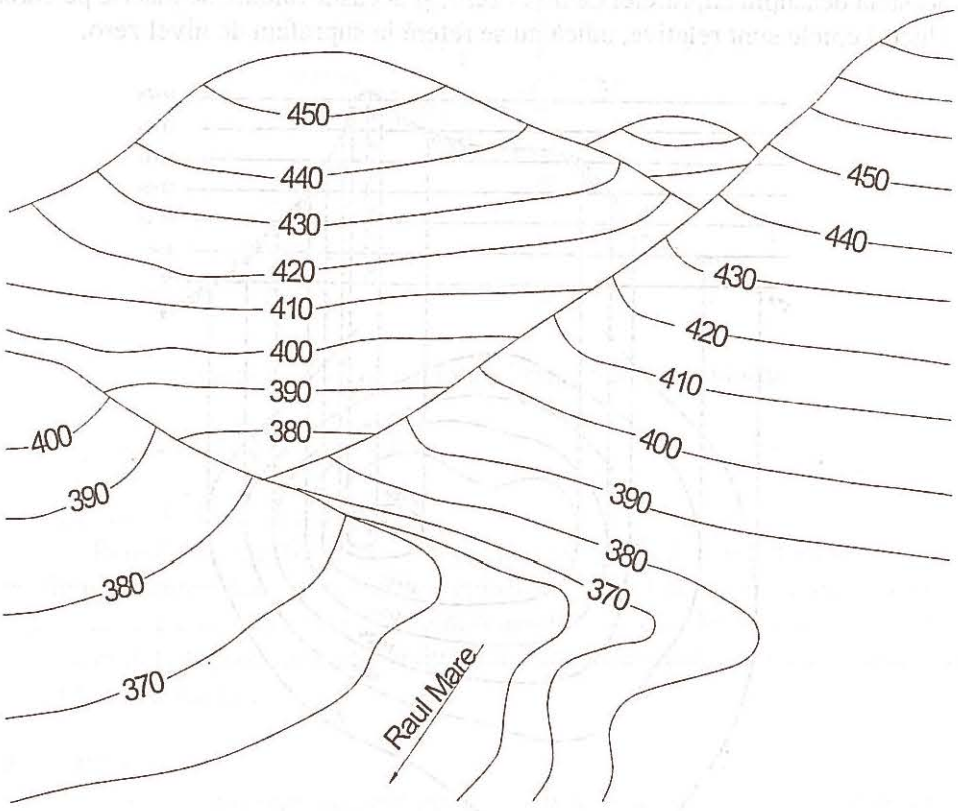


Figura 1.16 [29]
Principiul curbelor de nivel

Pentru ca densitatea curbelor de nivel pe plan să nu fie prea mare, pentru a nu încărca planul și totuși să rezulte o reprezentare suficient de fidelă a reliefului pentru scara respectivă, se recomandă ca echidistanța curbelor de nivel în funcție de scara planului să fie ca în tabelul de mai jos.

Aceasta ar fi echidistanța curbelor de nivel normale, însă de multe ori se mai introduc și curbe de nivel ajutătoare, care se desenează cu linii întrerupte.

Curbele de nivel principale nu sunt altceva decât a cincea sau a zecea linie de nivel normală, îngroșată pentru a se putea identifica mai ușor variația reliefului, dar mai ales valoarea liniilor de nivel.

432593

Echidistanța curbelor de nivel în funcție de scara planului.

Tabelul 1-1

Scara planului	Echidistanța curbelor de nivel [m]	Scara planului	Echidistanța curbelor de nivel [m]
1:1000	1	1:10000	5 și 10
1:2000	2	1:20000	10 și 20
1:2500	2	1:50000	20
1:5000	5 și 2	1:100000	40

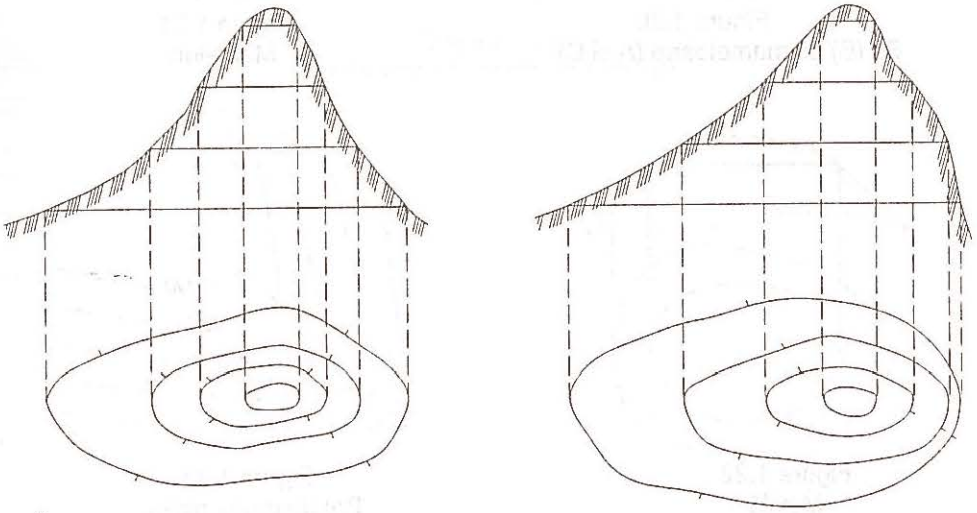


Figura 1.17
Mamelon

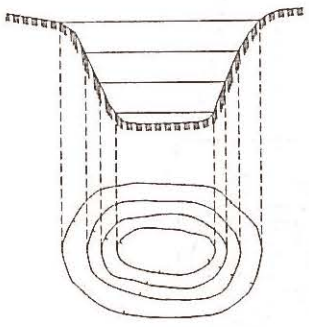


Figura 1.18
Căldare

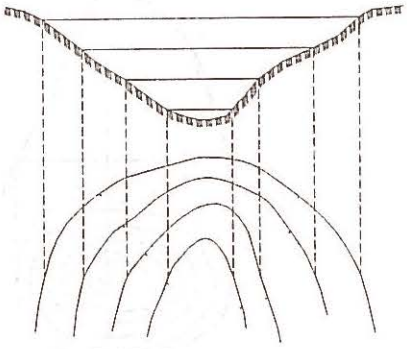


Figura 1.19
Vale

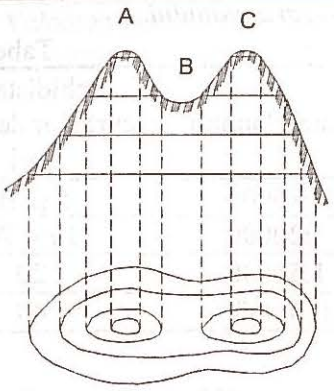


Figura 1.20
Şa (B) cu mameloane (A şi C)

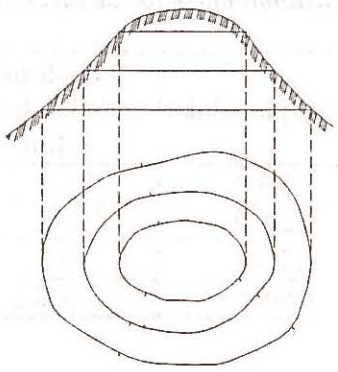


Figura 1.21
Mamelon

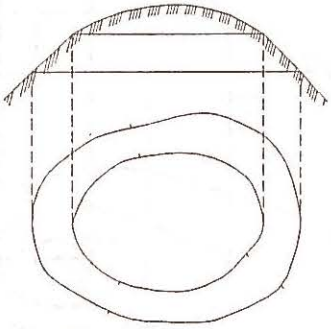


Figura 1.22
Movilă

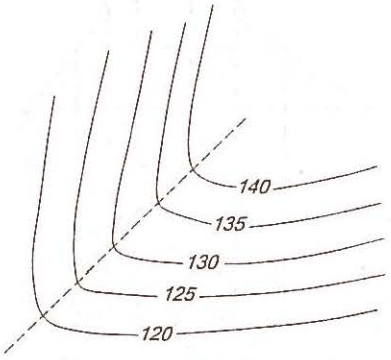


Figura 1.23
Bot de deal - picior

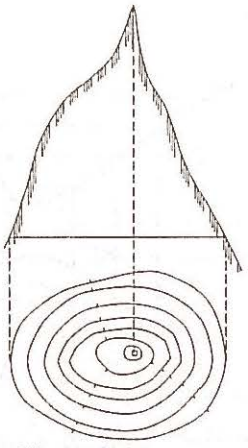


Figura 1.24
Săgeată

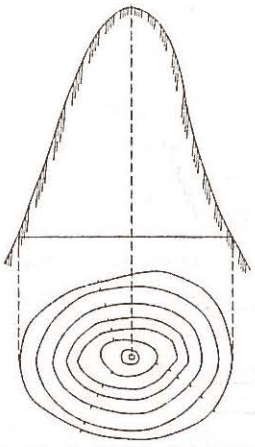


Figura 1.25
Pisc

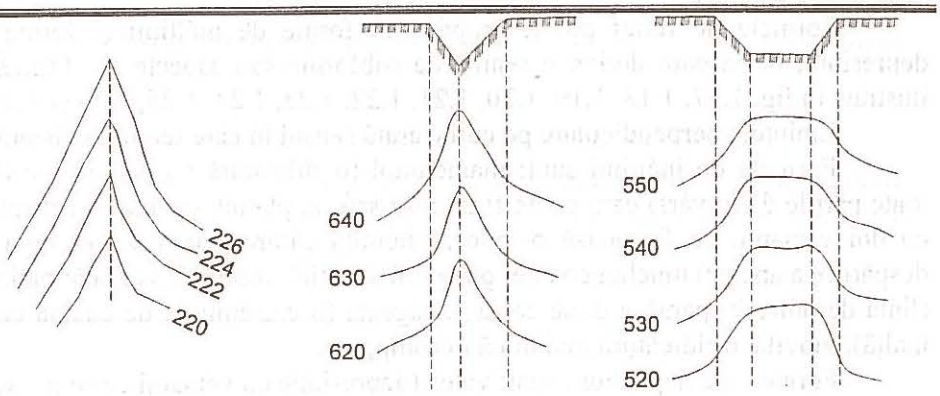


Figura 1.26
Fir de vale (cu fir îngust şi fir lat)

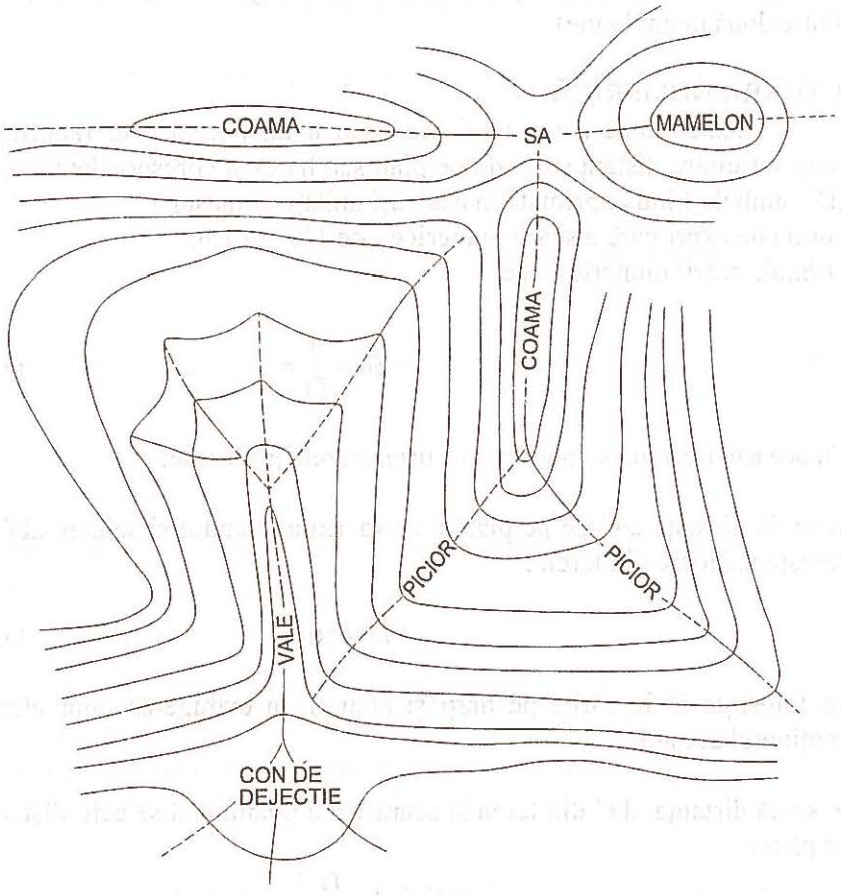


Figura 1.27 [29]
Forme de relief reunite

Formele de relief pot fi grupate în: forme de înălțimi și forme de depresiuni, de la care derivă o seamă de subforme sau aspecte ale formelor, ilustrate în fig. 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26 și 1.27.

Liniuțele perpendiculare pe curbe arată sensul în care terenul coboară.

Formele de înălțimi sunt: mamelonul (o ridicătură cu pante ce cad în toate părțile de la vârf) care poate fi un pisc sau un platou; coama (o ridicatură cu doi versanți, ce formează o spinare numită cărarea coamei sau linia de despărțire a apelor) muchia coamei putând fi ascuțită, rotunjită sau lată; piciorul (linia de unire în pantă a două coaste); săgeata (o extremitate de coamă ce se înalță); movila, o ridicătură mai mică în câmp, etc.

Formele de depresiuni sunt: valea (depresiune cu versanți ce se unesc în fundul văii, numit talveg); căldarea (o depresiune închisă în toate părțile); bazinul (o depresiune închisă de obicei pe trei părți și deschisă pe o parte), denumirea de bazin presupune de obicei o regiune mare; șaua (depresiunea dintre două mameloane).

4. SCARA NUMERICĂ:

Scara numerică a unui plan sau a unei hărți este raportul numeric constant dintre distanța „d" de pe plan sau hartă și corespondenta ei din teren, „D", ambele fiind exprimate în aceleași unități de măsură.

Forma de exprimare a scării numerice este 1/n sau 1:n.

Formula scării numerice este:

$$Sc = \frac{d}{D} = \frac{1}{n} \qquad (1.20)$$

Cu această formulă se pot rezolva următoarele probleme:

a. se dă distanța „d" de pe plan și scara 1:n a planului și se cere „D", distanța corespunzătoare din teren :

$$D = d * n \qquad (1.21)$$

Se folosește în lucrările pe hărți și planuri, la extragerea unor elemente din conținutul acestora.

b. se dă distanța „D" din teren și scara 1:n a planului și se cere distanța „d" de pe plan :

$$d = \frac{D}{n} \qquad (1.22)$$

denumirea de bazin presupune de obicei o regiune mare; şaua (depresiunea dintre două mameloane).

4. SCARA NUMERICĂ:

Scara numerică a unui plan sau a unei hărţi este raportul numeric constant dintre distanţa „d" de pe plan sau hartă şi corespondenta ei din teren, „D", ambele fiind exprimate în aceleaşi unităţi de măsură.
Forma de exprimare a scării numerice este 1/n sau 1:n.
Formula scării numerice este:

$$Sc = \frac{d}{D} = \frac{1}{n} \qquad (1.20)$$

Cu această formulă se pot rezolva următoarele probleme:

a. se dă distanţa „d" de pe plan şi scara 1:n a planului şi se cere „D", distanţa corespunzătoare din teren :

$$D = d * n \qquad (1.21)$$

Se foloseşte în lucrările pe hărţi şi planuri, la extragerea unor elemente din conţinutul acestora.

b. se dă distanţa „D" din teren şi scara 1:n a planului şi se cere distanţa „d" de pe plan :

$$d = \frac{D}{n} \qquad (1.22)$$

c. se dă distanţa „d" de pe plan şi „D", omoloaga sa din teren şi se cere scara numerică 1:n :

$$n = \frac{D}{d} \qquad (1.23)$$

Se foloseşte în cazul în care se doreşte să se determine scara la care s-a executat o reprezentare grafică.
Pe hărţi şi planuri, distanţa „d" se măsoară de regulă în milimetri, iar distanţa corespunzătoare din teren, „D", se exprimă în metri.
d. Regula n/1000

$$1mm \text{ (pe harta)} = \frac{n}{1000} m \text{ (pe teren)} \qquad (1.24)$$

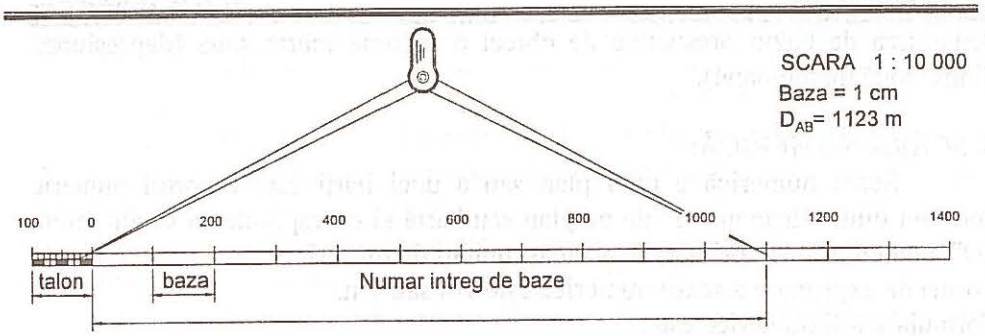


Figura 1.28
Scara grafică liniară (simplă)

Se deplasează compasul astfel ca un vârf să rămână tot timpul pe o valoare întreagă din bază, iar celălalt să fie în talon, până când vârful din talon atinge o intersecție a două linii ce marchează diviziunile lui. Mişcarea compasului se face astfel încât vârfurile lui să fie tot timpul pe aceeaşi linie orizontală. Distanța este egală cu numărul întreg de baze la care se adaugă partea fracționară citită pe talon.

Scările grafice se folosesc atât pentru determinarea distanței de pe hărți şi planuri, cât şi în transpunerea unor distanțe măsurate pe plan sau hartă.

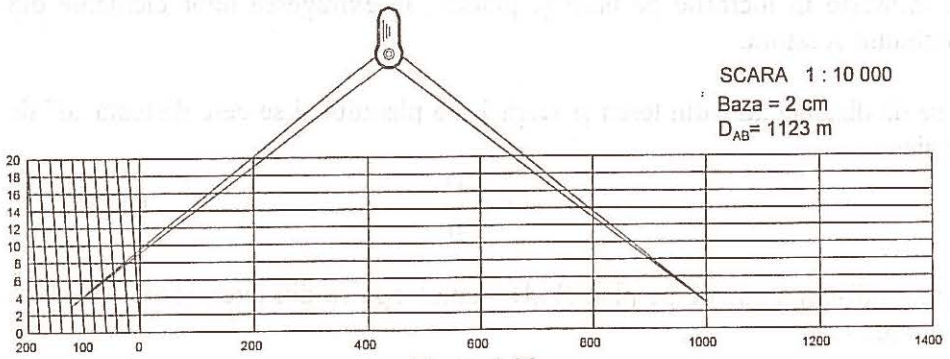


Figura 1.29
Scara grafică transversală (compusă)

6. PRECIZIA GRAFICĂ A SCĂRII:

Când se măsoară o distanță pe planuri şi hărți, când se raportează un punct pe planuri şi hărți sau la raportarea unei distanțe pe planuri şi hărți se comit erori de citire din cauza ochiului omenesc, care fără mijloace optice, nu poate asigura o precizie mai mare de $\pm(0.1 - 0.2)$ mm, se consideră că eroarea medie de citire sau raportare a unei distanțe pe plan sau hartă este de $\pm(0.2 - 0.3)$ mm. Această eroare, la transpunerea sau extragerea anumitor elemente

Se deplasează compasul astfel ca un vârf să rămână tot timpul pe o valoare întreagă din bază, iar celălalt să fie în talon, până când vârful din talon atinge o intersecție a două linii ce marchează diviziunile lui. Mișcarea compasului se face astfel încât vârfurile lui să fie tot timpul pe aceeași linie orizontală. Distanța este egală cu numărul întreg de baze la care se adaugă partea fracționară citită pe talon.

Scările grafice se folosesc atât pentru determinarea distanței de pe hărți și planuri, cât și în transpunerea unor distanțe măsurate pe plan sau hartă.

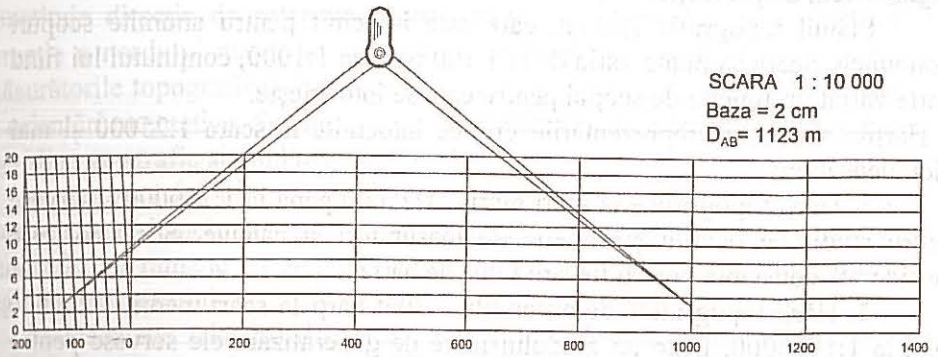


Figura 1.29
Scara grafică transversală (compusă)

6. PRECIZIA GRAFICĂ A SCĂRII:

Când se măsoară o distanță pe planuri și hărți, când se raportează un punct pe planuri și hărți sau la raportarea unei distanțe pe planuri și hărți se comit erori de citire din cauza ochiului omenesc, care fără mijloace optice, nu poate asigura o precizie mai mare de $\pm(0.1 - 0.2)$ mm, se consideră că eroarea medie de citire sau raportare a unei distanțe pe plan sau hartă este de $\pm(0.2 - 0.3)$ mm. Această eroare, la transpunerea sau extragerea anumitor elemente liniare de pe plan sau hartă, conduce la denaturarea lungimilor reale din teren, care este cu atât mai mare cu cât scara planului sau hărții este mai mică.
Precizia grafică reprezintă deci valoarea corespondentă din teren a valorii erorii de raportare sau citire de pe plan. Se exprimă prin relația:

$$\frac{e}{P_g} = \frac{1}{n} \Rightarrow P_g = e * n, \qquad (1.26)$$

unde: e = eroarea grafică; P_g = precizia grafică; n = numitorul scării

Precizia grafică este un parametru care permite stabilirea scării la care trebuie întocmit un plan, în funcție de mărimea detaliilor care trebuie

reprezentate.

7. CLASIFICAREA HĂRȚILOR ȘI PLANURILOR

În funcție de scară și conținut, planurile și hărțile se pot clasifica astfel:

a. Planuri topografice

Planul topografic de bază al țării, reprezentat prin planurile topografice la scările 1:2000, 1:5000 și 1:10000, tipărit în trei culori și realizat într-un singur sistem de proiecție;

Planul topografic special, care este întocmit pentru anumite scopuri economice. Scara sa poate varia de la 1:100 până la 1:1000, conținutul lui fiind foarte variat, în funcție de scopul pentru care se întocmește.

b. Hărțile sunt toate reprezentările grafice întocmite la scara 1:25000 și mai mici; deosebim:

1. Hărți topografice la scări mari – 1:25000 până la 1:100000 – servesc pentru studii de detaliu și o serie de măsurători și calcule. Scara lor este considerată constantă pentru fiecare foaie de hartă.

2. Hărți topografice de ansamblu – sunt hărți la scări medii, 1:200000 până la 1:1000000. Datorită gradului mare de generalizare ele servesc pentru studii generale și nu sunt folosite pentru măsurători și calcule.

3. Hărți geografice – sunt hărți la scări mici, peste 1:1000000 și servesc pentru studierea generală a unei țări sau zone geografice.

1.4. *INTERPRETAREA HĂRȚILOR ȘI PLANURILOR*

1. CAROIAJUL GEOGRAFIC:

Fiecare foaie de hartă sau plan este mărginită de meridiane și paralele, care formează caroiajul geografic al secțiunii respective. În colțurile caroiajului geografic ce mărginește o secțiune de hartă sau plan, sunt trecute valorile coordonatelor geografice φ și λ, care reprezintă valoarea paralelelor începând de la ecuator, respectiv valoarea meridianelor începând de la meridianul de origine Greenwich, care delimitează foaia de hartă.

Intervalele dintre meridianele și paralelele care delimitează foaia de hartă sunt împărțite pe verticală în minute de latitudine și pe orizontală în minute de longitudine. Baza pentru cadrul geografic este o linie de 0,1 mm grosime, care se îngroașă spre exterior până la 0,5 mm pentru minutele impare.

2. CAROIAJUL RECTANGULAR:

Caroiajul rectangular este format din drepte paralele la axele de coordonate rectangulare plane ale sistemului de coordonate adoptat. Aceste

paralele formează o rețea de pătrate cu latura de 1 km sau un număr rotund de kilometri, rețea denumită și rețea kilometrică. Pe planurile cu scara mai mare de 1:10000 această rețea de pătrate se trasează cu laturile de 10 cm la scara planului.

Pe un plan sau hartă, liniile caroiajului rectangular nu sunt paralele cu liniile caroiajului geografic.

3. UNGHIUL DE CONVERGENȚĂ A MERIDIANELOR

Întrucât în afara direcției nordului geografic, care este invariabilă și care constituie direcția de referință pentru orientarea planurilor, mai există și o direcție a nordului magnetic (care deși este variabilă, este adesea folosită în măsurătorile topografice), distingem orientări geografice (sau simplu orientări) și orientări magnetice. Se știe că prin orice punct de pe pământ poate fi dus un meridian geografic și unul magnetic.

Datorită faptului că pământul are o formă aproximativ sferică, ceea ce face ca meridianele geografice să conveargă spre poli, direcția nordului geografic nu rămâne paralelă cu ea însăși pe suprafața pământului, decât în regiunea ecuatorului.

Deoarece triangulațiile geodezice pe întreg cuprinsul României sunt determinate în plan față de un singur sistem de axe rectangulare în proiecție stereografică, rezultă că o direcție oarecare, definită într-un plan de proiecție, este orientată nu față de meridianul geografic al locului respectiv, ci față de o paralelă la meridianul de referință al întregului sistem.

Să considerăm sistemul de axe xOy (fig. 1.30) față de care este reprezentată în plan triangulația geodezică a unei suprafețe mari. Una dintre axe - în cazul fig. (1.30), axa X - este dirijată după direcția nord a originii O. Să considerăm apoi o dreaptă AB de pe teren, determinată în plan față de sistemul xOy. Pentru a se defini orientarea direcției AB, să considerăm direcția nordului dusă prin A.

$$\varepsilon = \Delta\lambda * \sin\varphi \qquad (1.27)$$

în care $\Delta\lambda$ este diferența de longitudine și φ latitudinea medie a celor două puncte.

4. SEMNE CONVENȚIONALE:

Semnele convenționale sunt semne grafice simple, generalizate, alese astfel încât să sugereze imaginea detaliului din teren. Relieful, ca element principal din conținutul hărților și al planurilor, se reprezintă de asemenea convențional.

Semnele convenționale se pot clasifica astfel:

a. Semne convenționale pentru planimetrie

a1. Semne convenționale de scară : se folosesc pentru reprezentarea pe hărți sau planuri a unor detalii importante din teren, dar care datorită dimensiunii lor reduse nu pot fi reprezentate la scara respectivă. Aceste semne indică precis poziția detaliului pe care îl reprezintă prin centrul lor sau al axei lor de simetrie (de exemplu, reprezentarea punctelor geodezice, a stâlpilor, a fântânilor, etc.) ;

a2. Semne convenționale de contur : se folosesc pentru reprezentarea pe hărți sau planuri a detaliilor ce pot fi desenate la scara hărții (păduri, mlaștini, lacuri, grădini, etc.). Ele nu redau poziția reală a unui anumit detaliu din interiorul conturului;

a3. Semne convenționale explicative: sunt notările convenționale care se folosesc pentru a da o caracteristică cât mai deplină detaliilor topografice. Se folosesc totdeauna în combinație cu celelalte două categorii de semne pentru planimetrie (inscripțiile de pe un pod, în interiorul conturului unei păduri, la căminele rețelelor edilitare, etc.);

b. Semne convenționale pentru relief (altimetrie)

Curbele de nivel reprezintă poziția în plan a liniilor care unesc puncte de aceeași cotă de pe suprafața topografică a terenului.

Curbele de nivel se împart în următoarele categorii:

b1. Curbe de nivel normale, care se trasează la echidistanța normală „E", aleasă în funcție de scara hărții sau a planului și în funcție de accidentația terenului. Se reprezintă printr-o linie subțire și continuă;

b2. Curbe de nivel principale, care sunt curbe de nivel normale îngroșate ce se trasează la cote rotunde. Pe ele se fac inscripțiile care indică valoarea curbei de nivel;

b3. Curbe de nivel ajutătoare, care se trasează prin linii întrerupte, la echidistanța E/2, între curbele normale;

b4. Curbe de nivel accidentale, care se trasează cu linie punctată, la echidistanța E/4, între curbele normale.

c. Haşuri care se folosesc la reprezentarea terenurilor accidentate (cu panta peste 35°), care nu pot fi reprezentate prin curbe de nivel. Aceste zone au indicat conturul, cotele lor la creastă şi la bază, iar în interiorul conturului apar haşuri care sunt linii trasate pe direcţia de cea mai mare pantă, care prin lungime, densitate şi grosime indică gradul de accidentaţie a terenului. (Exemple: râpă, viroagă, ravenă, movilă, groapă, mal abrupt, etc.).

Semnele convenţionale pentru planimetrie şi relief sunt cuprinse în atlasele de semne convenţionale pentru diverse scări, ele fiind în general identice ca formă pentru diferite scări, deosebindu-se numai prin dimensiuni.

1.5. *PROBLEME CE POT FI REZOLVATE PE HĂRTI ŞI PE PLANURI*

1.5.1. Determinarea unor elemente de planimetrie

1. LINIA DE CEA MAI MARE PANTĂ

Linia de cea mai mare pantă a unui plan este acea linie a planului care face cel mai mare unghi cu planul orizontal. Într-un plan înclinat se pot duce o infinitate de asemenea linii, toate fiind paralele între ele.

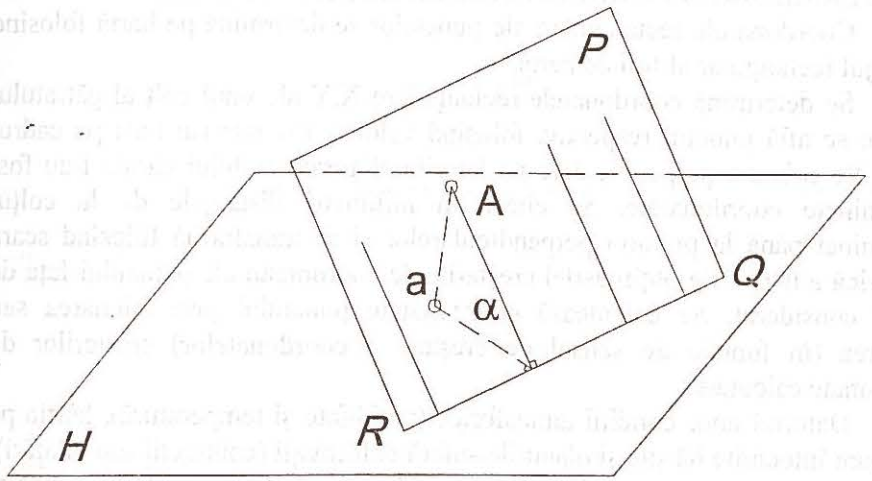


Figura 1.31
Linia de cea mai mare pantă

Să considerăm un plan înclinat P şi un plan orizontal H. Linia de intersecţie a celor două plane va fi RQ. Orice linie cuprinsă în planul P şi

perpendiculară pe linia RQ este o linie de cea mai mare panta a planului P, în raport cu planul H, deoarece face cu planul orizontal cel mai mare unghi (fig. 1.31).

Conform fig. 1.31, liniile de cea mai mare pantă, ca şi proiecţiile lor în planul orizontal H, sunt perpendiculare pe linia RQ - de intersecţie a planului P cu planul orizontal H.

Deoarece terenul (pe porţiuni limitate) poate fi asemuit cu plane oarecare P, rezultă că liniile de cea mai mare pantă a terenului, trebuie să taie perpendicular curbele de nivel, atât în elevaţie cât şi în plan.

2. DETERMINAREA COORDONATELOR GEOGRAFICE

Coordonatele geografice ale punctelor se determină pe hartă folosind cadrul geografic al foii de hartă.

Se duc din punctul respectiv paralele la cadrul geografic până ce acestea intersectează liniile cadrului. Se stabileşte valoarea minutului de latitudine şi longitudine unde paralelele au intersectat cadrul geografic, în funcţie de valorile arcelor de paralel şi de meridian care delimitează foaia de hartă (înscrise în colţul de S –V al hărţii).

Prin interpolare liniară se calculează secundele care trebuie adăugate la valorile mai sus stabilite.

3. DETERMINAREA COORDONATELOR RECTANGULARE

Coordonatele rectangulare ale punctelor se determină pe hartă folosind caroiajul rectangular al foii de hartă.

Se determină coordonatele rectangulare X,Y ale unui colţ al pătratului în care se află punctul respectiv, folosind valorile înscrise (în km) pe cadrul hărţii. Se coboară perpendiculare pe laturile alăturate colţului căruia i-au fost determinate coordonatele. Se citesc în milimetri distanţele de la colţul determinat până la piciorul perpendicularelor şi se transformă folosind scara numerică a hărţii. Se obţin astfel creşterile de coordonate ale punctului faţă de colţul considerat. Se calculează coordonatele punctului prin adunarea sau scăderea (în funcţie de sensul de creştere a coordonatelor) creşterilor de coordonate calculate.

Datorită unor condiţii atmosferice (umiditate şi temperatură), hârtia pe care sunt întocmite hărţile şi planurile suferă deformaţii (contracţii sau dilatări). Pentru determinarea cât mai exactă a unei mărimi de pe hartă (în special lungimi), se recomandă folosirea unui coeficient care să anuleze diferenţa. Acest coeficient se poate determina folosind caroiajul rectangular al hărţii.

Cunoscându-se dimensiunea teoretică la care a fost trasat caroiajul rectangular, se poate verifica prin măsurarea pe hartă dacă acest caroiaj corespunde sau nu şi se poate calcula un coeficient k după relaţia:

$$k = \frac{l_{teoretica}}{l_{reala}} \qquad (1.28)$$

Deoarece deformația hârtiei este neuniformă pe anumite direcții se vor calcula coeficienți de deformație atât pe direcția axei OX, cât şi pe direcția axei OY. De asemenea, deformația hârtiei are valori diferite în anumite porțiuni ale foii de hartă. Din acest motiv se va stabili deformația hârtiei în zona hărții în care se lucrează.

4. DETERMINAREA DISTANȚEI

Distanța se poate determina:

a. folosind scara numerică a hărții

$$D_{AB}[m] = d[mm] * \frac{n}{1000} \qquad (1.29)$$

b. folosind scara grafică a hărții (simplă şi transversală)

Precizia grafică pentru o eroare e =± 0.2 mm este:

$$P_g = \pm e * n$$

$$\text{pentru } n = 1000 \text{ si } e = 0.2 \Rightarrow \qquad (1.30)$$

$$\Rightarrow P_g[m] = \pm 0.2 * \frac{n}{1000} = \pm 2m$$

$$D^{AB}_{plan} - 2m < D^{AB}_{teren} < D^{AB}_{plan} + 2m \qquad (1.31)$$

c. din coordonate:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \qquad (1.32)$$

5. DETERMINAREA ORIENTĂRII ŞI A UNGHIURILOR ORIZONTALE

Orientarea unei direcții reprezintă unghiul format de direcția nordului geografic cu direcția respectivă, măsurat în sens orar şi având originea pe direcția nordului geografic.

Unghiul de orientare al unei direcții se poate determina pe hartă prin două procedee:

a. folosind coordonatele rectangulare care definesc direcția respectivă:

$$tg\theta_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \qquad (1.33)$$

b. folosind raportorul circular gradat în grade centesimale.

Pentru determinarea orientării cu raportorul se procedează astfel: se duce o paralelă din punctul A la direcția nordului geografic, se așează centrul raportorului în A, astfel ca valoarea zero să coincidă cu direcția nordului și se măsoară direct pe raportor valoarea orientării direcției AB.

Pentru a răspunde necesităților topografiei, cercul trigonometric s-a adaptat astfel:

1. axa Ox este verticală, Oy este orizontală (fig. 1.32) ;
2. originea unghiurilor este axa Ox ;
3. sensul pozitiv, numit sens direct topografic, este cel orar.

Definițiile și proprietățile funcțiilor trigonometrice se păstrează neschimbate dacă se construiește cercul topografic conform fig. 1.32.

În vederea aflării valorii și a semnului funcțiilor trigonometrice când se dau unghiuri în diferite cadrane sau calculului unghiurilor din întreg cercul când cunoaștem semnul și valoarea funcțiilor, este necesar să aplicăm reducerea unghiurilor la primul cadran (tab. 1-2).

Cadranul în care se află orientarea calculată depinde de semnele ambelor creșteri de coordonate, conform tabelului 1-2 și fig. 1.32.

Cunoscând orientările mai multor direcții cu originea în același punct, se poate determina unghiul orizontal dintre direcții ca diferență de orientări.

Reducerea unghiurilor la primul cadran

Tabelul 1-2

Funcții Trigono-metrice	CADRAN I	CADRAN II	CADRAN III	CADRAN IV
	$0^g<\theta<100^g$	$100^g<\theta<200^g$	$200^g<\theta<300^g$	$300^g<\theta<400^g$
	$\omega_1=\theta_1$	$\omega_2=\theta_2-100^g$	$\omega_3=\theta_3-200^g$	$\omega_4=\theta_4-300^g$
Sinθ	$+\sin\omega_1$	$+\cos\omega_2$	$-\sin\omega_3$	$-\cos\omega_4$
Cosθ	$+\cos\omega_1$	$-\sin\omega_2$	$-\cos\omega_3$	$+\sin\omega_4$
Tgθ	$+tg\,\omega_1$	$-ctg\,\omega_2$	$+tg\,\omega_3$	$-ctg\,\omega_4$
Ctgθ	$+ctg\,\omega_1$	$-tg\,\omega_2$	$+ctg\,\omega_3$	$-tg\,\omega_4$

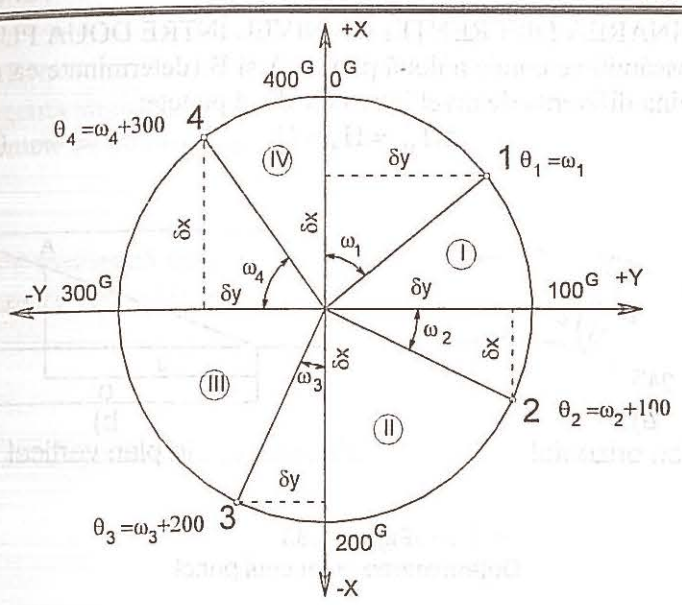


Figura 1.32
Cerc topografic. Reprezentarea funcțiilor trigonometrice.

1.5.2. Determinarea unor elemente de altimetrie

1. DETERMINAREA ALTITUDINII UNUI PUNCT

Altitudinea (cota) unui punct de pe plan sau hartă se determină folosind curbele de nivel ale hărții sau planului.

Când un punct căruia dorim să-i aflăm cota se află chiar pe o curbă de nivel, cota punctului corespunde cu valoarea curbei de nivel. În cazul în care punctul se află între două curbe de nivel, cota sa se determină ducând prin punct linia de cea mai mare pantă (linia care este perpendiculară pe ambele curbe). Din triunghiul de pantă (fig.1.33b) se determină:

$$\delta h[m] = \frac{d[mm]}{D[mm]} * E[m] \qquad (1.34)$$

Cota unui punct poate fi determinată mult mai expeditiv, dar cu o precizie mai scăzută, folosind o riglă gradată (metoda zecimilor). Se așează rigla astfel încât muchia gradată să fie tangentă la punct și se rotește în jurul punctului până când zero al riglei atinge o curbă de nivel, iar valoarea de 1 cm de pe riglă atinge cealaltă curbă. Cunoscându-se echidistanța curbelor de nivel, fiecărui milimetru de pe riglă îi va corespunde 1/10 din E.

2. DETERMINAREA DIFERENȚEI DE NIVEL ÎNTRE DOUĂ PUNCTE

Cunoscându-se cotele a două puncte A și B (determinate ca mai sus) se poate determina diferența de nivel între cele două puncte:

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A \qquad (1.35)$$

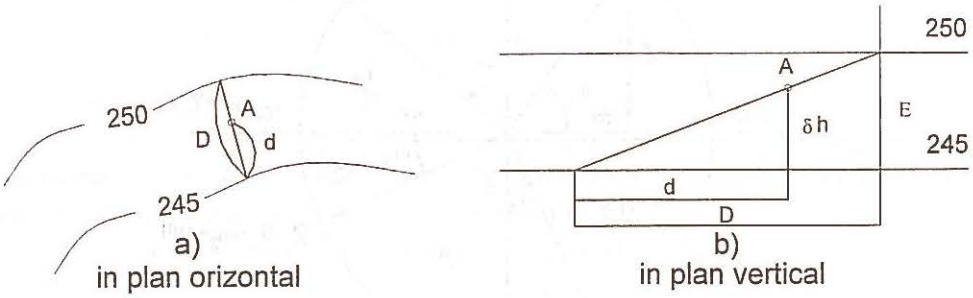


Figura 1.33
Determinarea cotei unui punct

2. DETERMINAREA UNGHIULUI VERTICAL AL UNEI DREPTE

Cunoscându-se distanța orizontală (determinată prin una din metodele prezentate anterior) și diferența de nivel, se poate calcula unghiul vertical (de înclinare) al dreptei respective (fig. 1.34).

$$tg\alpha = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} \qquad (1.36)$$

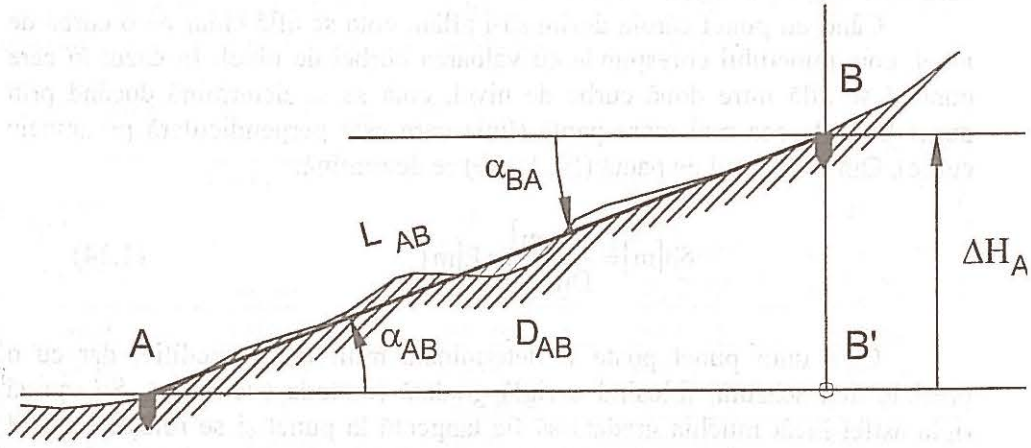


Figura 1.34
Determinarea unghiului de pantă

3. DETERMINAREA PANTEI LINIEI DINTRE DOUĂ PUNCTE

Tangenta unghiului de înclinare α reprezintă chiar panta liniei ce unește cele două puncte de pe plan (fig. 1.34)

$$p = tg\alpha = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} \qquad (1.37)$$

Panta poate fi exprimată astfel :

a. în procente (la sută) și la mie

$$p\% = 100 * tg\alpha$$
$$p‰ = 1000 * tg\alpha \qquad (1.38)$$

b. în grade sexazecimale sau centesimale

$$\alpha_{AB} = arctg\frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} \qquad (1.39)$$

c. pe cale grafică, folosind graficul de pantă

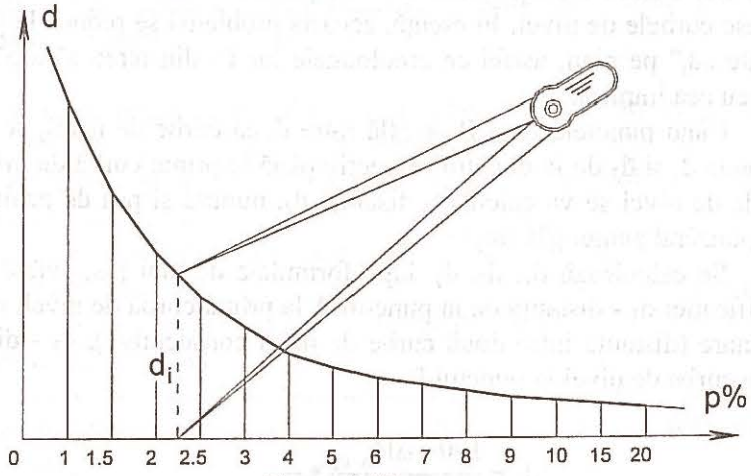


Figura 1.35
Graficul de pantă

Graficul de pantă este o scară care permite determinarea grafică pe un plan sau hartă a pantei unei linii numai între două curbe de nivel. Graficul de pantă se desenează pe marginea foii de plan sau hartă, în funcție de echidistanța E a curbelor de nivel și numitorul scării. În construcția graficului de pantă se pleacă de la formula pantei, luându-se un sistem de axe rectangulare, apoi pe una din axe la intervale arbitrare se notează valorile pantei sau ale unghiului de

pantă α. Din aceste puncte se vor ridica perpendiculare de lungime $d = \frac{D}{n} \Rightarrow D = \frac{100 * E}{p}$ ale căror extreme se unesc, obținându-se graficul de pantă.

Folosirea graficului de pantă se face astfel: se ia între vârfurile compasului sau distanțierului segmentul „d_i" între două curbe de nivel pe direcția liniei căreia dorim să-i aflăm panta. Această distanță d_i se transpune pe graficul de pantă astfel ca un picior al compasului să fie așezat pe axa pantei, iar celălalt vârf să fie pe grafic (fig. 1.35), citindu-se prin aproximare panta acestei linii pe axa pantei.

Graficul de pantă se poate construi pentru orice formă de exprimare a pantei unei linii (α, p%, p‰), folosind una din axele sistemului rectangular pentru forma de exprimare a pantei, iar cealaltă axă pentru distanțe.

4. TRASAREA PE PLAN A UNEI LINII DE PANTĂ DATĂ

Trasarea pe plan a unei linii de pantă constantă (dată), apare de regulă în lucrările de studii pentru trasarea axei unei căi de comunicație, a axei unui canal, etc. Pentru trasarea unei linii de pantă constantă între două puncte se folosesc curbele de nivel. În esență, această problemă se reduce la găsirea unor distanțe „d_i" pe plan, astfel ca omoloagele lor D_i din teren să aibă panta p%, egală cu cea impusă.

Când punctele A şi B se află între două curbe de nivel, se vor calcula distanțele d_1 şi d_3 de la punctul respectiv până la prima curbă de nivel, iar între curbele de nivel se va calcula o distanță d_2, numită şi pas de proiectare, toate corespunzând pantei p% impuse.

Se calculează d_1, d_2, d_3 după formulele de mai jos, având următoarea semnificație: d_1 - distanța de la punctul A la prima curbă de nivel, d_2 - pasul de proiectare (distanța între două curbe de nivel consecutive), d_3 - distanța de la ultima curbă de nivel la punctul B.

$$d_1 = \frac{100 * \Delta H_{A-C_1}}{p\%} * \frac{1}{n}$$

$$d_2 = \frac{100 * E}{p\%} * \frac{1}{n} \qquad (1.40)$$

$$d_3 = \frac{100 * \Delta H_{C_2-B}}{p\%} * \frac{1}{n}$$

Pentru a trasa linia de pantă constantă pe plan, se ia în compas distanța d_1 şi cu vârful compasului în A se descrie un arc de cerc care va intersecta

prima curbă de nivel în două puncte. Aceste puncte unite cu punctul A dau direcții care respectă condiția de pantă impusă. Cu vârful compasului în aceste puncte și cu distanța d_2 se descriu două arce de cerc care intersectează curba de nivel următoare în patru puncte, obținându-se patru variante care respectă condiția dată. Mergând în continuare cu d_2 în compas, variantele se dublează, până la ultima curbă, din care, cu d_3 în compas se face închiderea pe punctul B.

În funcție de condițiile de proiectare se alege din aceste trasee varianta definitivă. Pentru a elimina încă de la început unele variante care devin neeconomice (se îndepărtează mult de aliniamentul AB), este bine ca proiectarea liniei de pantă constantă (impusă) să se pornească din ambele puncte A și B, făcându-se joncțiunea lor pe traseul dintre A și B.

5. CONSTRUIREA PROFILULUI TOPOGRAFIC AL TERENULUI

De multe ori, în lucrările de studiu pe hartă, se ridică problema reproducerii configurației naturale a terenului pe un anumit aliniament.

Pe planuri sau hărți cu curbe de nivel, această problemă se rezolvă construind profilul topografic al terenului pe o anumită direcție dorită.

Pentru a reprezenta cât mai sugestiv terenul între două puncte se parcurg următoarele etape :

a. se consideră scara lungimilor egală cu scara planului iar scara înălțimilor de 10, 20, 25 de ori mai mare decât scara lungimilor;
b. se unesc punctele A și B cu o linie dreaptă și se numerotează toate punctele unde linia taie curbele de nivel;
c. pe axa orizontală se alege o origine care se atribuie punctului A;
d. se iau în compas distanțele între punctul A și punctele de intersecție ale dreptei AB cu curbele de nivel și se transpun pe axa orizontală, din aceste puncte ridicându-se verticale;
e. pe axa verticală a profilului se așează cotele punctelor la scara înălțimilor, pornind de la un plan de referință care să permită reprezentarea punctului de cea mai mică cotă;
f. având pe aliniamentul AB toate punctele de cotă cunoscută, se duc drepte orizontale din aceste valori reprezentate pe scara verticală, până ce acestea intersectează verticalele ridicate din punctele corespondente;
g. unind punctele de intersecție obținute, rezultă profilul topografic al terenului.

În general, la întocmirea profilului topografic nu se mai construiește scara înălțimilor, valoarea cotelor raportându-se direct pe verticalele ridicate din punctele caracteristice, eliminându-se astfel încărcarea nejustificată a graficului.

6. STABILIREA VIZIBILITAȚILOR PE HARTĂ

Uneori este necesar să se știe dacă există sau nu vizibilitate între anumite puncte, se întocmește un profil al terenului pe direcțiile respective. Dacă linia ce unește două puncte de pe profil rămâne tot timpul deasupra profilului terenului, înseamnă că între cele două puncte există vizibilitate. Este cazul puncetelor A și B din fig. 1.36. În caz contrar nu există vizibilitate (fig. 1.37).

În practica curentă, nu se redactează întreg profilul pentru a se constata vizibilitatea, ci sunt raportate doar punctele cele mai înalte, acelea care se apreciază că ar putea înpiedica vizibilitatea.

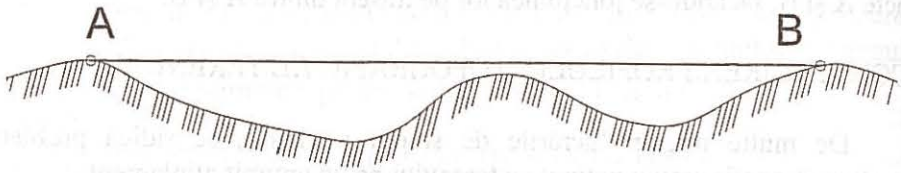


Figura 1.36
Vizibilitate între punctele A și B

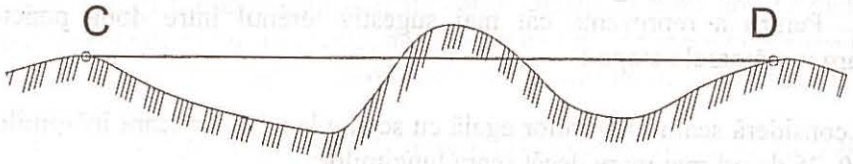


Figura 1.37
Lipsă de vizibilitate între punctele C și D

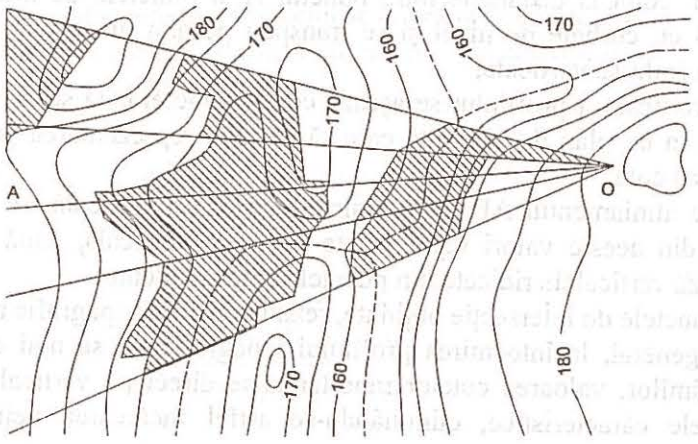


Figura 1.38
Stabilirea pe hartă a porțiunilor nevăzute din O

Totodată trebuie avută în vedere şi vegetaţia, mai ales cea arborescentă, precum şi alte obstacole de pe direcţia de interes, cum ar fi construcţiile etc.

Asemenea probleme, se întâlnesc cu deosebire la proiectarea punctelor de triangulaţie. În cazul reţelelor geodezice, unde punctele pot fi foarte depărtate, se ia în calcul şi efectul curburii pământului asupra vizibilităţii.

Adesea se cere să fie stabilite pe hartă zonele nevăzute din anumite poziţii. În astfel de cazuri se duc mai multe direcţii din punctul respectiv O (fig. 1.38) pe care se vor întocmi profile pentru stabilirea vizibilităţilor.

Pe fiecare profil se vor identifica apoi porţiunile nevăzute din punctul O (fig. 1.39), care vor fi apoi aplicate pe direcţiile respective din fig. 1.38. În funcţie de ele se desenează zonele nevăzute din punctul O. Problema este frecvent folosită în domeniul militar.

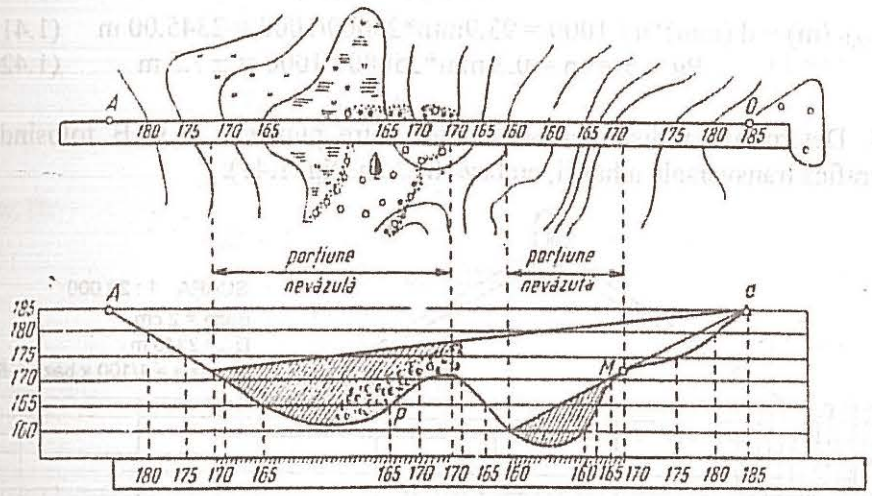


Figura 1.39 [29]
Stabilirea pe profil a zonelor nevăzute din O

1.5.3. Exemple. Utilizarea hărţilor şi planurilor.

Pe o hartă la scara 1:25000 au fost amplasate două puncte A şi B. Pe porţiunea de hartă anexată se pot rezolva următoarele probleme:

1. Determinarea distanţei orizontale dintre punctele A şi B folosind scara grafică simplă a hărţii, cu baza b=1cm (fig. 1.40)
2. Determinarea distanţei orizontale dintre punctele A şi B folosind scara numerică a hărţii:

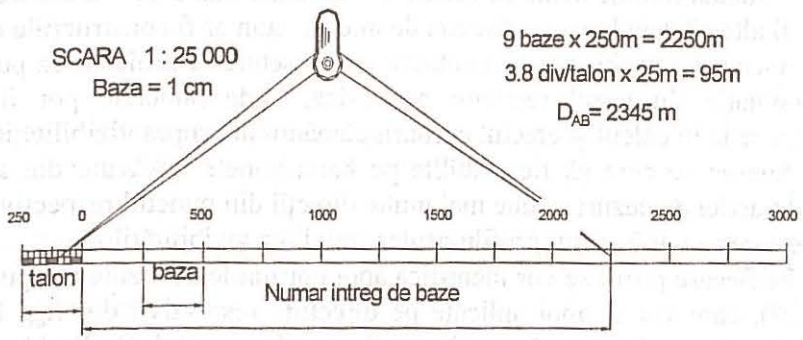


Figura 1.40
Utilizarea scării grafice liniare

$$D_{AB}\,(m) = d\,(mm)*n / 1000 = 93.9mm*25000/1000 = 2345.00\ m \quad (1.41)$$

$$Pg = \pm e*n = 0.3\ mm*25000 / 1000 = \pm 7.5\ m \quad (1.42)$$

3. Determinarea distanței orizontale dintre punctele A şi B folosind scara grafică transversală a hărții, cu baza b=2cm (fig. 1.41):

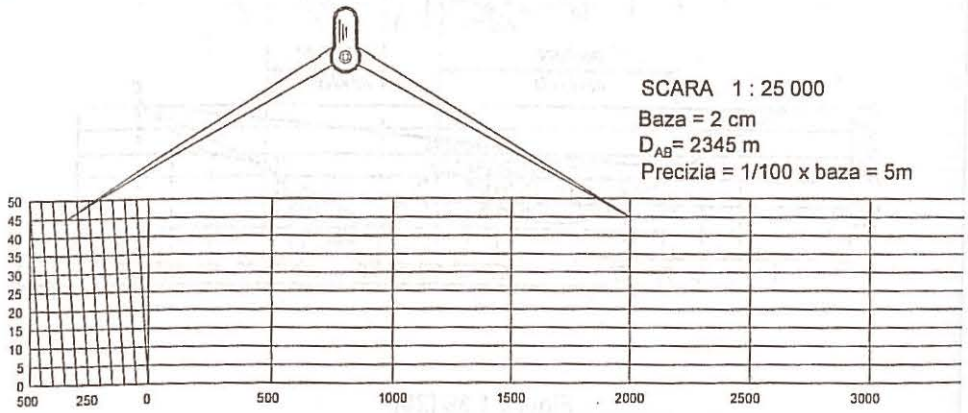


Figura 1.41
Utilizarea scării grafice transversale

4. Determinarea coordonatelor rectangulare ale punctelor A şi B:

a. pentru punctul A:

$$X_{NE} = 5093\ km$$

$$Y_{NE} = 5304\ km$$

$$X_A = X_{NE} - \Delta X = 5093\ km - (15.2mm*25000 / 1000) = \quad (1.43)$$

$$= 5093\ km - 380m = 5092620\ m$$

$Y_A = Y_{NE} - \Delta Y = 5304km - (6.1mm * 25000 / 1000) =$
$= 5304\ km - 152.5m = 5303847.5m$

b. pentru punctul B:

$$X_{NV} = 5091\ km$$
$$Y_{NV} = 5303\ km$$
$$X_B = X_{NV} - \Delta X = 5091km - (10.2mm * 25000 / 1000) = \quad (1.44)$$
$$= 5091\ km - 255\ m = 5090745m$$
$$Y_B = Y_{NV} - \Delta Y = 5303km - (17.9mm \cdot 25000 / 1000) =$$
$$= 5303km - 47.5m = 5302447.5m$$

c. ținând seama de contracția hârtiei hărții:
pentru A:

$$K_x = 40/40.1 = 0.997506$$
$$K_y = 40/40.2 = 0.995025$$
$$\Delta X_A = 379.05\ m \quad (1.45)$$
$$\Delta Y_A = 151.74\ m$$
$$X_A = 5092620.95\ m$$
$$Y_A = 5303848.26\ m$$

pentru B:

$$K_x = 1$$
$$K_y = 40/40.3 = 0.992556$$
$$\Delta X_B = 255.00\ m$$
$$\Delta Y_B = 444.17m \quad (1.46)$$
$$X_B = 5090745.00\ m$$
$$Y_B = 5302444.17\ m$$

5. Determinarea coordonatelor geografice ale punctelor A și B
a. pentru punctul A:

$$\varphi_A = \varphi_0 + \Delta\varphi = 45^0 56' + (29.2mm * 60''/74\ mm) =$$
$$= 45^0 56' + 23,''7 \approx 45^0 56' 24'' \quad (1.47)$$
$$\lambda_A = \lambda_0 + \Delta\lambda = 24^0 28' + (12.3mm * 60''/52\ mm) =$$
$$= 24^0 28' + 14,''2 \approx 24^0 28' 14''$$

b. pentru punctul B:

$$\varphi_B = \varphi_0 + \Delta\varphi = 45^0 55' + (27.0mm * 60''/74\ mm) =$$
$$= 45^0 55' + 21,''9 \approx 45^0 55' 22'' \quad (1.48)$$
$$\lambda_B = \lambda_0 + \Delta\lambda = 24^0 27' + (10.2mm * 60''/52\ mm) =$$
$$= 24^0 27' + 11,''8 \approx 24^0 27' 12''$$

6. Determinarea distanței orizontale dintre punctele A și B folosind coordonatele rectangulare:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 2343.220\text{m} \qquad (1.49)$$

7. Determinarea orientării dintre punctele A și B:

$$\theta_{AB} = \text{arctg}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = 240^G90^C41^{CC} \qquad (1.50)$$

8. Determinarea cotelor punctelor A și B și a diferenței de nivel dintre acestea:

$$H_A = 655\text{ m} + (0.8\text{mm}*5\text{ m} / 1.5\text{ mm}) =$$
$$= 655\text{ m} + 2.67\text{ m} = 657.67\text{ m} \qquad (1.51)$$

$$H_B = 515\text{ m} + (0.9\text{mm}*5\text{ m} / 1.8\text{ mm}) =$$
$$= 515\text{ m} + 2.50\text{ m} = 517.50\text{ m}$$
$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A = -140.17\text{ m} \qquad (1.52)$$

9. Construirea profilului topografic al terenului pe direcția punctelor A și B:

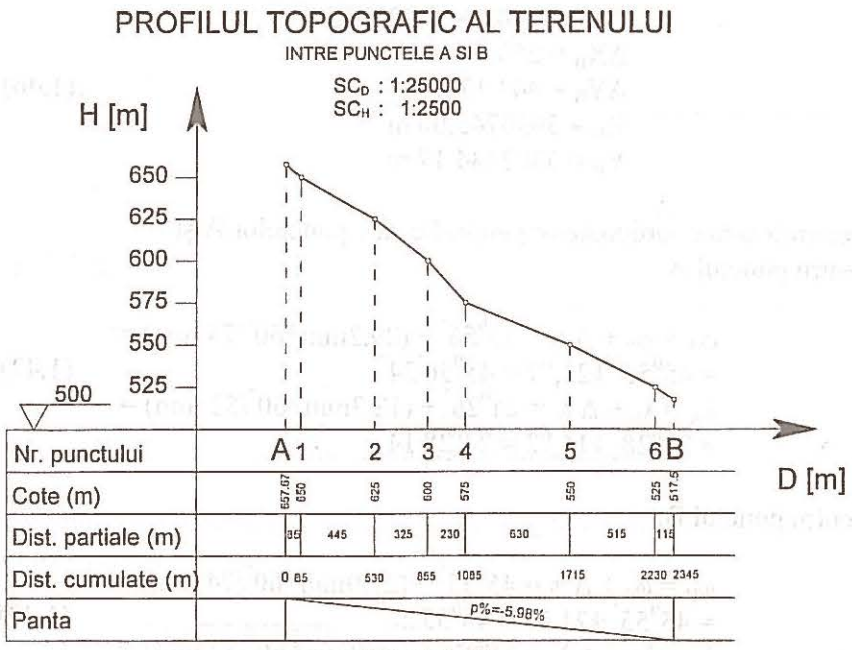


Figura 1.42
Profilul topografic al terenului

10. Determinarea pantei liniei dintre punctele A şi B:

$$p = tg\alpha = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} = -0.059819 \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned} p^{\circ}/_{\circ} &= 100 * tg\alpha = -5.9819\% \\ p^{\circ}/_{\circ\circ} &= 1000 * tg\alpha = -59.819‰ \end{aligned} \tag{1.54}$$

$$tg\alpha = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned} \alpha^{G} &= -3^{G}80^{C}37^{CC} \\ \alpha^{O} &= -3^{0}25'37'' \end{aligned} \tag{1.56}$$

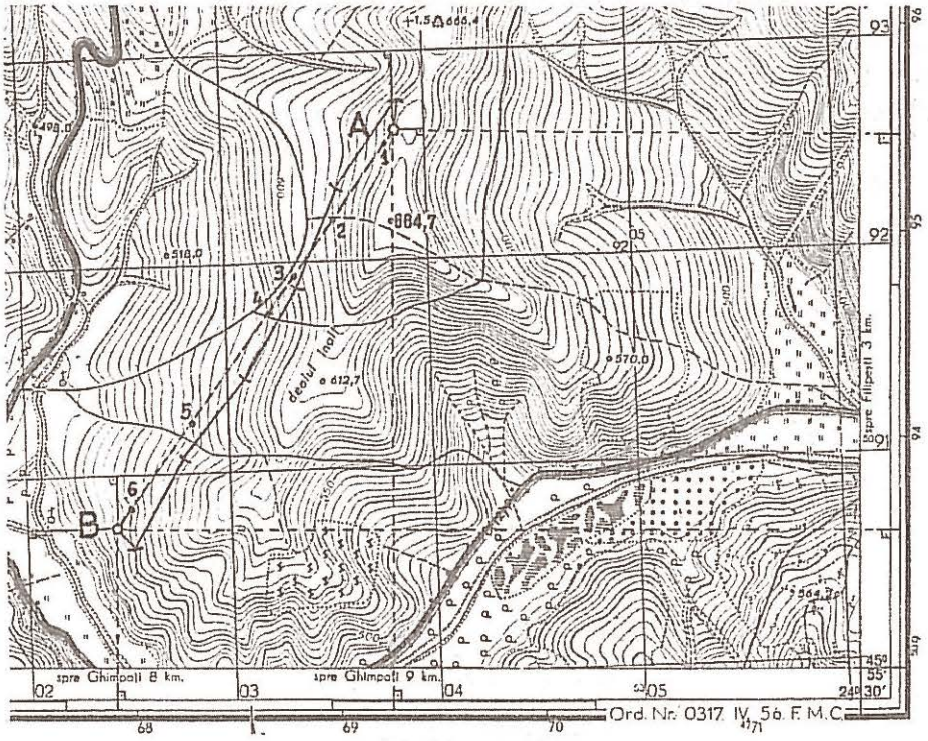


Figura 1.43
Harta la scara 1:25 000. Zona de lucru.

11. Trasarea pe hartă a unei linii de pantă dată (constantă) între punctele A şi B:

$$d_1 = \frac{100 * 7.67\text{m}}{5\%} * \frac{1}{25000} = 6.1\text{mm}$$

$$d_2 = \frac{100 * 25\text{m}}{5\%} * \frac{1}{25000} = 20.0\text{mm} \quad (1.57)$$

$$d_3 = \frac{100 * 7.5\text{m}}{5\%} * \frac{1}{25000} = 6.0\text{mm}$$

2. REȚELE DE SPRIJIN

2.1. *TRIANGULAȚIA GEODEZICĂ*

Densitatea punctelor geodezice este, în general, cuprinsă intre 1 şi 60 km dar nu toate punctele rețelei fac parte din aceeași categorie. Ele se grupează în cinci "ordine", din care primele trei (I, II şi III) sunt numite "ordine superioare", iar ultimele două (IV şi V) sunt numite "ordine inferioare".

Fiecare din aceste ordine grupează puncte care se află la aceeași depărtare, adică: rețelele de ordinul I sunt alcătuite din puncte aflate la distanțe de circa 20-60 km, rețelele de ordinul II sunt alcătuite din puncte aflate la distanțe de circa 10-20 km, rețelele de ordinul III sunt alcătuite din puncte aflate la distanțe de circa 3-10 km, iar rețelele de ordine inferioare IV şi V, grupează puncte aflate la distanțe de 1-2 km respectiv 500-1000 m.

În fig. 2.1 se poate vedea triunghiul I-II-III din rețeaua de ordinul I, apoi punctele A, B şi C de ordinul II şi punctele a, b, c, d, e,.... de ordinul III. Aşa se prezintă schematic complexul celor trei rețele de ordin superior, în interiorul cărora se plasează rețelele de ordin inferior IV şi V.

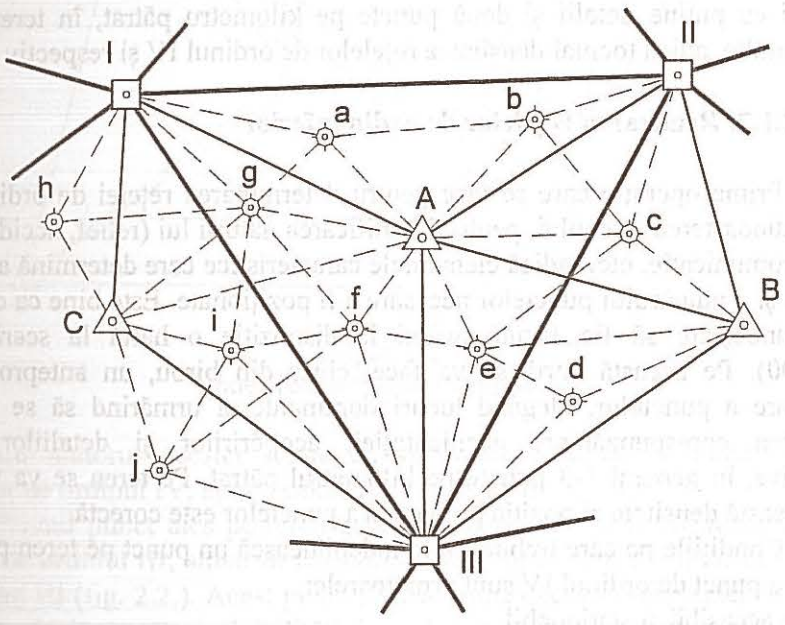


Figura 2.1
Configurația rețelei de triangulație

O primă caracteristică a acestor rețele, este aceea că fiecare din ele (în afară de ordinul I), completează pe cea de ordin imediat superior. A doua caracteristică este aceea că rețelele de ordinul I se determină primele, apoi din acestea cele de ordinul II, cele de ordinul III se determină din ordinele I și II, cele de ordinul IV se determină din ordinele I, II și III și în sfârșit, cele de ordinul V, din toate ordinele precedente.

Dată fiind slaba densitate a punctelor de ordinul I, II și chiar III, ridicările topografice nu se fac, în general pe puncte din rețelele de ordin superior. Desigur, dacă un asemenea punct există pe zona care trebuie ridicată el va fi folosit, dar acest punct, sau chiar doua-trei nu pot oferi o constrângere utilă. În schimb punctele de ordin inferior IV și V, au tocmai densitatea optimă pentru o bună constrângere și cu posibilități de efectuare a ridicărilor de detalii.

2.1.1. Îndesirea triangulației geodezice

Dacă pe un teritoriu nu există "rețea geodezică completă", dezvoltată până la ordinul IV sau V inclusiv, trebuie făcute toate operațiile de îndesire succesivă a rețelelor de ordinul I, prin crearea rețelei de ordinul II, apoi de îndesire a rețelei de ordinul II prin crearea rețelei de ordinul III etc., pentru a se ajunge la densitatea de puncte necesare unei ridicări topografice. Densitate care în medie se consideră optimă dacă este de un punct pe kilometru pătrat în terenuri cu puține detalii și două puncte pe kilometru pătrat, în terenuri cu detalii multe, adică tocmai densitatea rețelelor de ordinul IV și respectiv V.

2.1.2. Realizarea rețelelor de ordin inferior

Prima operație care se face pentru determinarea rețelei de ordinul IV, este recunoașterea terenului, pentru identificarea naturii lui (relief, accidentație, căi de comunicație, etc.) adică elementele caracteristice care determină alegerea poziției și a numărului punctelor necesare a fi poziționate. Este bine ca operația de recunoaștere să fie făcută având la dispoziție o hartă la scară mare (1:25000). Pe această hartă se va face, chiar din birou, un anteproiect de amplasare a punctelor, alegând locuri dominante și urmărind să se asigure densitatea corespunzătoare accidentației, acoperirilor și detaliilor zonei respective, în general 1-3 puncte pe kilometrul pătrat. Pe teren se va verifica dacă această densitate și poziția proiectată a punctelor este corectă.

Condițiile pe care trebuie să le îndeplinească un punct pe teren pentru a fi ales ca punct de ordinul IV sunt următoarele:

1. să fie accesibil și staționabil;
2. să fie pe un teren stabil;
3. să aibă vizibilitățile necesare pentru ca punctul să poată fi determinat;

3. să aibă vizibilitățile necesare pentru ca punctul să poată fi determinat;
4. să aibă vizibilitățile necesare pentru a putea ajuta la determinarea a cât mai multe alte puncte de ordinul IV și V din jur;
5. să poată asigura în condiții optime ridicările de detalii din jur.

Prin punct accesibil și staționabil se înțelege faptul că se poate ajunge la punct și se poate instala acolo un aparat pentru a măsura unghiuri sau distanțe în condiții normale. Teren stabil înseamnă nemlăștinos, nenisipos etc., de asemenea înseamnă că nu este pe o margine de râpă sau pe un mal de apă etc.

2.1.3. Schița vizelor

Se va întocmi pe teren în timpul recunoașterii, o schiță a vizibilităților fiecărui punct în parte, numită schița vizelor.

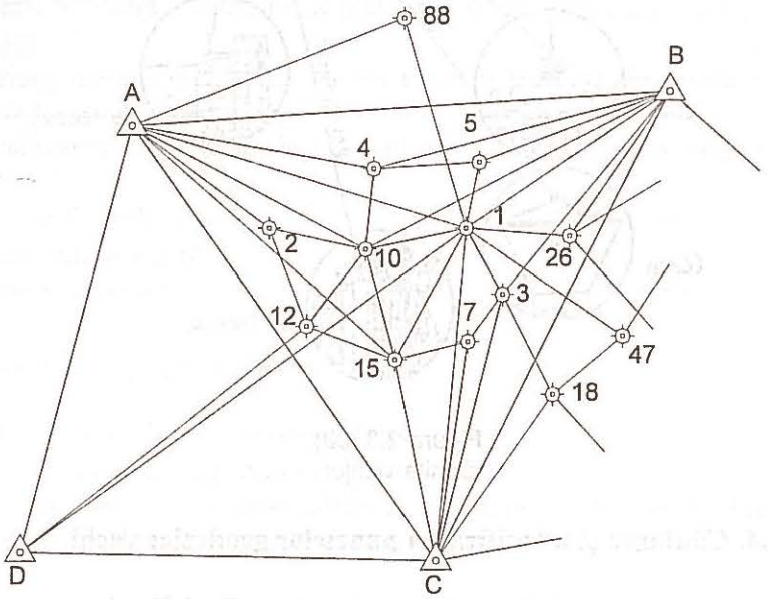


Figura 2.2
Îndesirea rețelei de triangulație

Cu ajutorul acestei schițe se va stabili ordinea de determinare a punctelor de ordinul IV, apoi a celor de ordinul V (fig. 2.1.).

Primul punct ales pe teren pentru determinare va fi un punct cât mai central, de ordinul III, situat în interiorul triunghiului ABC, format din puncte de ordinul III (fig. 2.2.). Acest punct se determină exclusiv din puncte de ordin superior, deci va avea vizibilități la cel puțin trei asemenea puncte. De asemenea el trebuie să asigure vize pentru determinarea cât mai multor puncte vecine, de ordinul IV sau V.

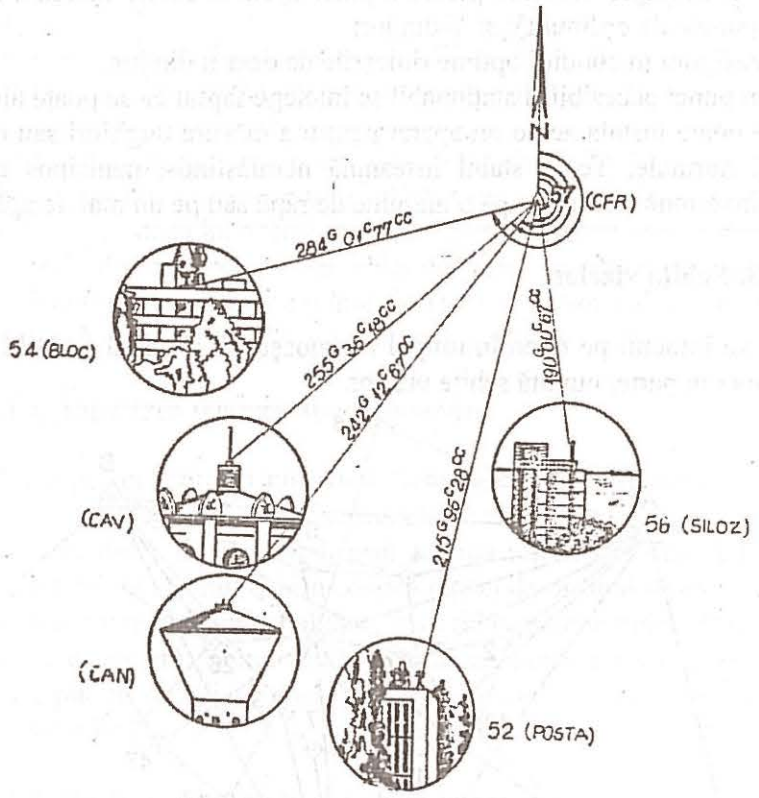


Figura 2.3 [30]
Schița vizelor

2.1.4. Căutarea și identificarea punctelor geodezice vechi.

Pentru a putea stabili locul punctelor de ordinul IV și pentru a putea întocmi schița vizelor este necesar ca în prealabil să se facă o altă operație și anume, aceea de identificare și la nevoie de "replantare" a punctelor de ordin superior sau de ordinul IV vechi, între care se încadrează lucrarea nouă de determinare a punctelor de ordinul IV.

Căutarea acestor puncte se va face cu ajutorul hărții și a informațiilor culese de la localnici, iar identificarea precisă se face după semnalele și bornele de marcaj ale acestor puncte.

Când semnalele geodezice (piramidele) sunt încă în picioare și bornele nu sunt distruse sau deplasate, operațiile de căutare și identificare sunt mult ușurate.

2.2. *REȚELE DE TRIANGULAȚIE LOCALĂ*

Se execută în zone în care rețeaua geodezică nu există sau nu asigură cerințele de precizie necesare efectuării lucrărilor topografice. Dacă suprafața de ridicat este mai mare de 200-250 km^2, rețeaua de triangulație locală se realizează prin extinderea rețelei geodezice, la determinare luându-se în calcul efectul curburii Pământului. Dacă suprafața de ridicat este mai mică de 200 km^2, rețeaua de triangulație locală se realizează prin metode topografice.

Rețele de triangulație locală se proiectează și se execută atunci când:

- triangulația geodezică nu există pe suprafața de ridicat;
- condițiile de precizie asigurate de rețeaua geodezică de stat nu sunt îndeplinite;
- este necesară o densitate de puncte de sprijin mai mare, determinate cu precizie ridicată.

Triangulația locală poate fi privită ca o triangulație geodezică pe o întindere redusă (laturi de lungime maximă de 3 km).

Realizarea unei rețele de triangulație locală comportă în principal 3 etape:

- operații preliminare;
- operații de teren;
- operații de calcul.

2.2.1. Operații preliminare

Operațiile preliminare constau în:

- întocmirea formalităților pentru începerea lucrării;
- procurarea instrumentelor, materialelor și datelor necesare executării lucrării;
- proiectarea pe hartă a triangulației locale.

2.2.2. Proiectarea pe hartă a triangulației locale

1. Pe o hartă la scară mică, se delimitează suprafața care constituie obiectul măsurătorilor geodezice. Această suprafață este necesară pentru probleme de organizare, precum și pentru un antecalcul privind costul lucrării.
2. Se aleg amplasamentele punctelor de triangulație, funcție de densitatea dorită și asigurarea vizibilității între puncte. Când vizibilitatea între puncte este incertă se întocmesc profile topografice ale terenului, pe baza curbelor de nivel ale hărții. În cazul când pe aliniamentul dintre două puncte sunt obstacole (păduri, clădiri, etc.) se va căuta situația în care viza treace la minimum trei metri deasupra obstacolelor (fig. 2.4).

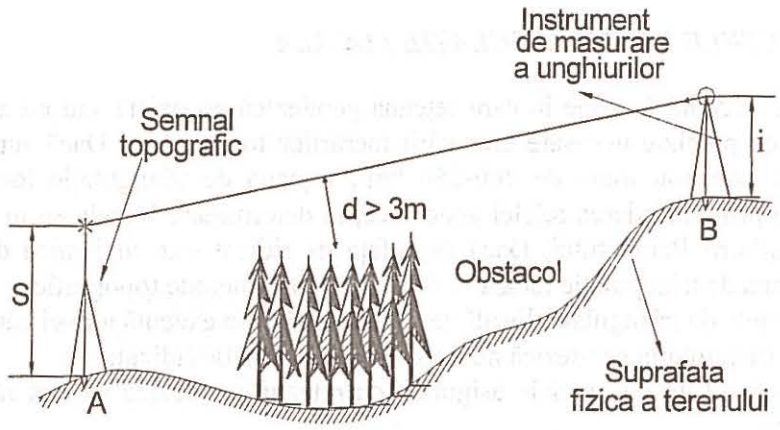


Figura 2.4
Asigurarea vizibilității între punctele rețelei de triangulație

3. Se va prevedea modul de semnalizare a punctelor şi condițiile de acces la aceste puncte.
4. Prin proiectare se va căuta ca triunghiurile să fie bine conformate, să fie pe cât posibil echilaterale.

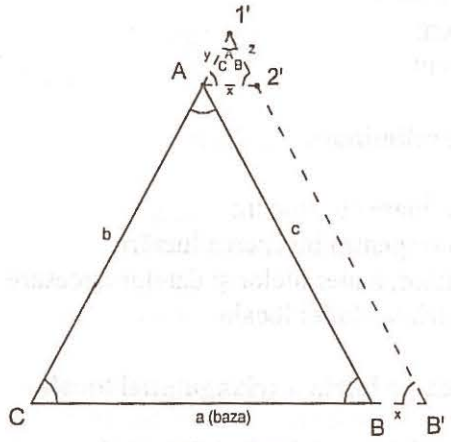


Figura 2.5
Analiza propagării erorilor în rețeaua de triangulație

Dacă triunghiurile sunt bine conformate atunci transmiterea erorilor de la un triunghi la altul va fi minimă. Concomitent se va studia posibilitatea măsurării unei laturi care să constituie baza rețelei de triangulație topografică locală sau a unei baze auxiliare.

Importanța care revine conformației optime a triunghiurilor va fi ilustrată în cele ce urmează (fig. 2.5)

Fie triunghiul ABC în care avem:

- $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ – unghiurile triunghiului (măsurate);
- a, b, c – laturile triunghiului ABC;
- α, β, γ – erorile de măsurare corespunzătoare unghiurilor $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$;
- x, y, z – erorile corespunzătoare laturilor;

Pentru a analiza propagarea erorilor vom considera două cazuri:

a. Unghiurile s-au măsurat fără erori și doar baza este afectată de eroarea x deci:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ și } x \neq 0 \qquad (2.1)$$

Eroarea x va genera un triunghi de eroare $\Delta A1'2'$, în care laturile sunt x, y și z și putem scrie:

$$\frac{x}{\sin A} = \frac{y}{\sin B} = \frac{z}{\sin C} \Rightarrow \qquad (2.2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{\sin A} \sin B \\ z = \dfrac{x}{\sin A} \sin C \end{cases} \qquad (2.3)$$

Triunghiurile ABC și A1'2' fiind asemenea putem scrie:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Rightarrow \qquad (2.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{a} b \\ z = \dfrac{x}{a} c \end{cases} \qquad (2.5)$$

Se remarcă din relațiile (2.3) și (2.5) necesitatea ca a = b = c și sinA = sinB = sinC pentru ca erorile x, y, z să fie egale.

Dacă b = 2a => y = 2x sau c = 3a => z = 3x, ș.a.m.d.

Laturile b și c constituind baze pentru triunghiurile alăturate, se observă o amplificare a erorii bazei inițiale, dacă triunghiurile sunt rău conformate.

b. Când baza este neeronată, iar unghiurile sunt afectate de erori:

$$x = 0,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{a}{\sin(A+\alpha)} = \frac{b+y}{\sin(B+\beta)} = \frac{c+z}{\sin(C+\gamma)} \tag{2.7}$$

$$a\sin(B+\beta) = (b+y)\sin(A+\alpha) \tag{2.8}$$

$$a\ \sin B\ \cos\beta + a\ \cos B\ \sin\beta = \tag{2.9}$$
$$= b\ \sin A\ \cos\alpha + b\ \cos A\ \sin\alpha + y\ \sin A\cos\alpha + y\ \cos A\ \sin\alpha$$

α şi β au valori mici de regulă de ordinul secundelor şi putem fac aproximaţiile :

$$\sin\alpha = \alpha^{cc}\ \sin 1^{cc},\ \cos\alpha \approx 1;$$
$$\sin\beta = \beta^{cc}\ \sin 1^{cc},\ \cos\beta \approx 1 \tag{2.10}$$

înlocuind obţinem :

$$\Rightarrow a\ \sin B + a\ \cos B\ \beta^{cc}\ \sin 1^{cc} = \tag{2.11}$$
$$= b\ \sin A + b\ \cos A\ \alpha^{cc}\ \sin 1^{cc} + y\ \sin A + y\ \cos A\ \alpha^{cc}\ \sin 1^{cc}$$

însă: $a\ \sin B = b\ \sin A$, iar ultimul termen se neglijează fiind foarte mic. Rezultă

$$y = \frac{a\cos B\cdot\beta^{cc}\cdot\sin 1^{cc} - b\cos A\cdot\alpha^{cc}\cdot\sin 1^{cc}}{\sin A} \tag{2.12}$$

Măsurându-se cu acelaşi instrument, de către acelaşi operator şi aceleaşi condiţii, se poate considera $\alpha = \beta = \gamma$ ca ordin de mărime.
Însă putem avea $\alpha = +\beta$ sau $\alpha = -\beta$

b1. Cazul când $\alpha = +\beta \Rightarrow$

$$y = \beta^{cc}\cdot\sin 1^{cc}\left(\frac{a}{\sin A}\cos B - \frac{b}{\sin A}\cos A\right) \tag{2.13}$$

Din teorema sinusurilor ştim că:

$$a = \frac{b}{\sin B}\sin A \tag{2.14}$$

şi rezultă:

$$y = \beta^{cc} \cdot \sin 1^{cc} \left(b \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin A} \cos B - \frac{b}{\sin A} \cos A\right) = \tag{2.15}$$

$$= \beta^{cc} \cdot \sin 1^{cc} \cdot b(ctgB - ctgA)$$

se observă că eroarea y a laturii b este 0 numai când B = A şi asemănător şi pentru C, deci când triunghiul este echilateral.

b2. Cazul când $\alpha = -\beta$ =>

$$y = \beta^{cc} \cdot \sin 1^{cc} \left(\frac{a}{\sin A} \cos B + \frac{b}{\sin A} \cos A\right) \tag{2.16}$$

dar

$$a = \frac{b}{\sin B} \sin A \tag{2.17}$$

$$y = \beta^{cc} \cdot \sin 1^{cc} \cdot b(ctgB + ctgA) \tag{2.18}$$

Eroarea y poate deveni zero numai dacă se anulează paranteza.
Notăm:

$$\Sigma = ctgB + ctgA = \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin A \sin B} =$$

$$= \frac{\sin(A + B)}{\frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]} \tag{2.19}$$

dar:

$$\hat{A} + \hat{B} = 200^G - \hat{C}$$

$$\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \sin \hat{C} \tag{2.20}$$

$$\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos(200^G - \hat{C}) = \cos \hat{C}$$

rezultă:

$$\Sigma = \frac{2 \sin C}{\cos(A - B) + \cos C} \tag{2.21}$$

Valoarea minimă pentru $\sum$ se obține atunci când numitorul este maxim, adică cos(A-B) $\rightarrow$ 1 şi aceasta se realizează numai când A = B. Asemănător se demonstrează că A = C, deci şi în această situație erorile sunt minime când ΔABC este echilateral.

Se admit ca unghiuri normale în triunghiuri, unghiurile cuprinse între $40^G - 80^G$, în mod excepţional se poate accepta un unghi de 30^G.

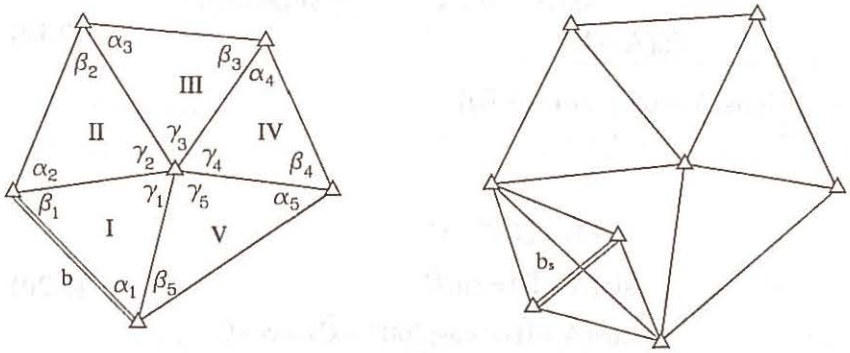
5. Se vor stabili punctele care vor fi determinate prin intersecţie înainte (antene, coşuri de fum, etc.), intersecţie înapoi sau intersecţie combinată.

6. Recunoaşterea terenului şi definitivarea proiectului conţine:
- definitivarea proiectului de marcare şi semnalizare a punctelor;
- să fie asigurat accesul la puncte cu materiale şi instrumente;
- terenul din jurul punctelor să fie stabil;
- terenul să nu fie cu vegetaţie înaltă care să împiedice vizibilitatea între puncte ; eventual se va face defrişarea şi curăţarea terenului din jurul punctelor şi de pe traseul bazei.

În funcţie de forma terenului şi de obstacolele pe care trebuie să le evităm şi în funcţie de relieful terenului, se aleg diverse tipuri de reţele de triangulaţie locală. În principiu, punctele de triangulaţie se aleg pe locuri dominante pentru a se asigura o cât mai bună vizibilitate în tur de orizont, la cât mai multe puncte de triangulaţie vecine.

2.2.3. Tipurile principale de reţele de triangulaţie locală [24]

1. Poligon cu punct central, cu baza normală şi baza scurtă (fig. 2.6).



b = baza normală
a)

b = baza scurtă
b)

Figura 2.6
Poligon cu punct central

Reţeaua de triunghiuri care formează un poligon cu punct central se aplică în cazul terenurilor întinse în toate direcţiile şi cu suficientă vizibilitate.

Se va măsura o latură a unui triunghi care va fi considerat triunghiul I şi

apoi în sensul acelor de ceasornic se numerotează celelalte triunghiuri cu II, III, IV şi V. Poligonul va trebui să aibă un număr de 5, cel mult 7 triunghiuri.

Din fiecare punct de triangulaţie se vor măsura toate unghiurile triunghiurilor şi se vor nota cu α_i, β_i, γ_i ca în fig. 2.6.a.

Când nu se poate măsura o latură a triunghiului se va măsura o aşa numită "bază scurtă", care se va dezvolta prin intermediul unui patrulater pe latura triunghiului, ca în fig. 2.6.b.

2. Lanţ de poligoane cu punct central (fig. 2.7).

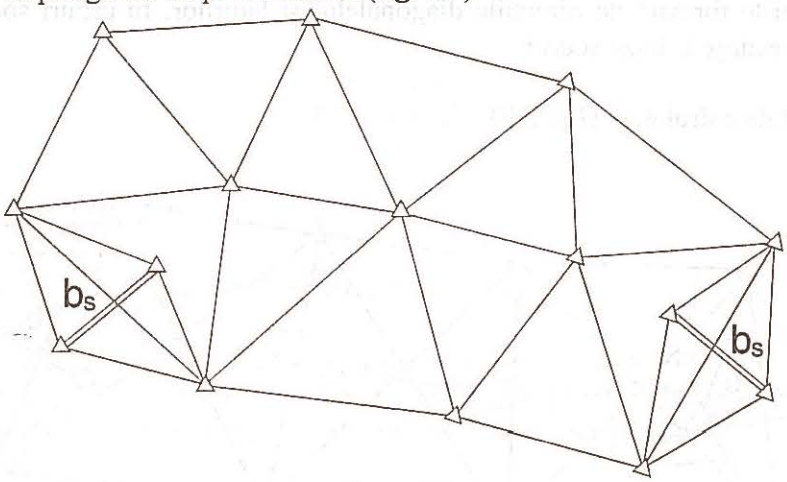
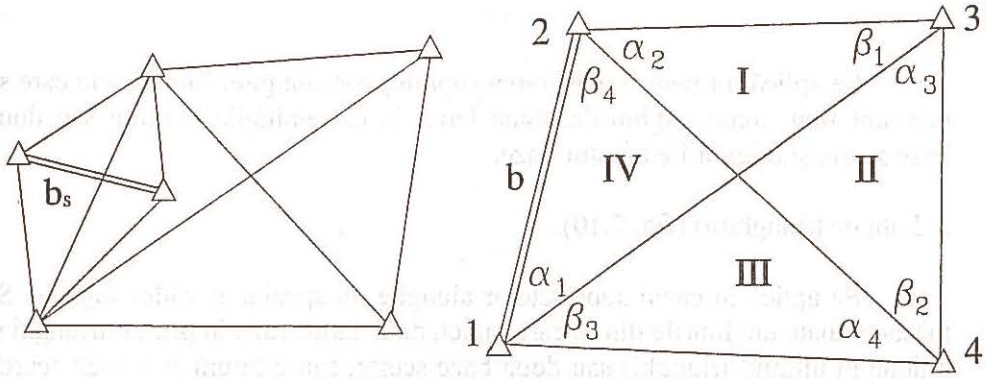


Figura 2.7
Lanţ de poligoane cu punct central



bS = bază scurtă b = bază normală

Figura 2.8
Patrulatere cu ambele diagonale observate

Se aplică în cazul suprafețelor alungite, dar destul de late. Poligoanele vor cuprinde câte 5-7 triunghiuri, cu laturile aproximativ egale, după cum impune terenul, astfel ca triunghiurile să fie cât mai aproape de forma echilaterală.

3. Patrulater cu diagonalele observate, cu bază normală și bază scurtă (fig. 2.8).

Se aplică în cazul terenurilor cu suprafață mică. Se măsoară o latură și toate unghiurile formate de direcțiile diagonalelor și laturilor. În cazuri speciale se poate recurge la baze scurte.

4. Lanț de patrulatere (fig. 2.9).

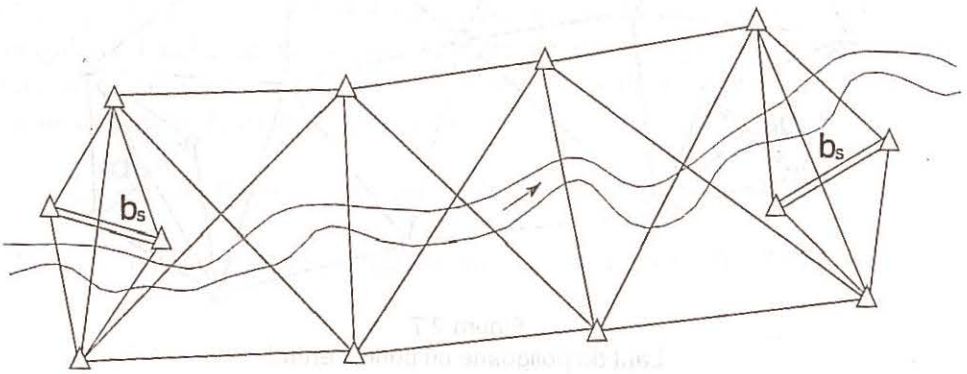


Figura 2.9
Lanț de patrulatere

Se aplică tot pentru măsurarea suprafețelor alungite. Elementele care se măsoară sunt: toate unghiurile, două laturi la extremitățile lanțului sau două baze scurte și orientările acestor baze.

5. Lanț de triunghiuri (fig. 2.10).

Se aplică în cazul suprafețelor alungite, în special al văilor înguste. Se măsoară toate unghiurile din fiecare punct, două laturi (una în primul triunghi și a doua în ultimul triunghi) sau două baze scurte, sau o latură și o bază scurtă. Se determină orientările acestor baze.

În cazul când numărul triunghiurilor lanțului este mai mare de zece, se vor măsura baze de control după fiecare zece triunghiuri.

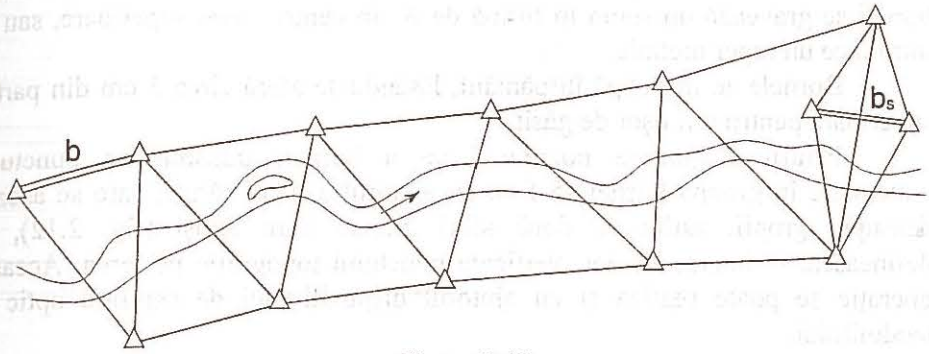


Figura 2.10
Lanț de triunghiuri

2.2.4. Operații de teren

2.2.4.1. Marcarea punctelor de planimetrie

Materializarea pe teren a punctelor topografice poartă denumirea de marcare. Punctele topografice se materializează pe teren prin borne, care rămân pe teren şi după terminarea măsurătorilor; la fel se materializează şi unele puncte de detaliu importante.

Bornele cu care se face marcarea de durată a punctelor topografice sunt din beton armat, beton sau piatră naturală şi pot avea diferite forme şi mărimi.

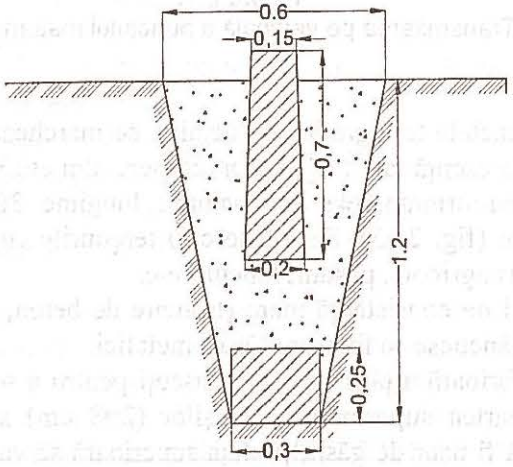


Figura 2.11
Tip de bornă

Pentru a fixa cu precizie punctul topografic, pe axa verticală centrală a bornei se gravează un semn în formă de X în centrul feței superioare, sau se introduce un reper metalic.

Bornele se îngroapă în pământ, lăsându-se afară circa 5 cm din partea superioară pentru a fi uşor de găsit.

Pentru asigurarea poziției juste a bornei, transmiterea punctului matematic în groapa bornei se face cu ajutorul a patru țăruşi, care se aşează deasupra gropii, astfel ca două sfori întinse între tăruşi (fig. 2.12), să definească, la intersecția lor, verticala punctului topografic pe teren. Această operație se poate realiza şi cu ajutorul dispozitivului de centrare optic al teodolitului.

Pentru a avea o siguranță în plus asupra regăsirii punctelor, se folosesc martori, care se introduc sub bornă, fiind semnalizați cu ajutorul unui strat de nisip sau cărămidă.

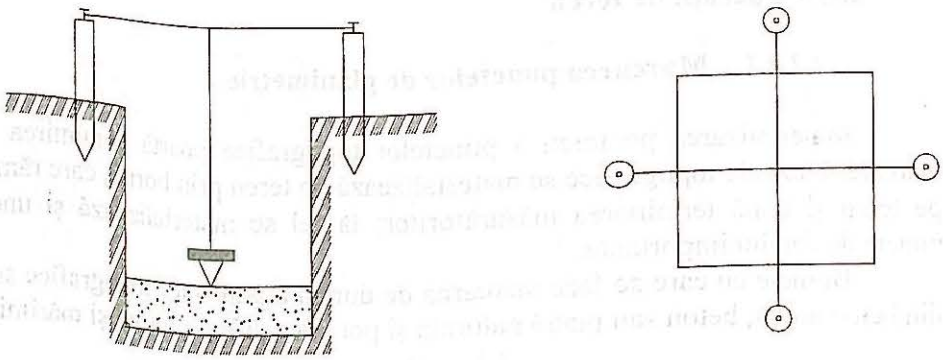


Figura 2.12
Transmiterea pe verticală a punctului matematic

Punctele topografice de detaliu, se marchează cu țăruşi. Țăruşii se fac din lemn de esență tare (fag, stejar, carpen, ulm etc.), de secțiune pătrată sau rotundă şi au următoarele dimensiuni : lungime 30-40 cm iar lățime (diametru) 4-5 cm (fig. 2.13). Se folosesc în terenurile cu consistență scăzută cum ar fi : terenuri agricole, păşuni, fănețuri etc.

În terenuri de consistență mare (trotuare de beton, platforme betonate) sau pietroase şi stâncoase se folosesc țăruşi metalici.

Partea inferioară a țăruşilor se va ascuți pentru a se uşura introducerea lor în pământ, partea superioara a țăruşilor (2=3 cm) se va lăsa deasupra terenului pentru a fi uşor de găsit; pe fața superioară se va însemna, cu un cui sau cu o gaură făcută cu un dorn, centrul țăruşului, care va constitui punctul matematic al punctului topografic.

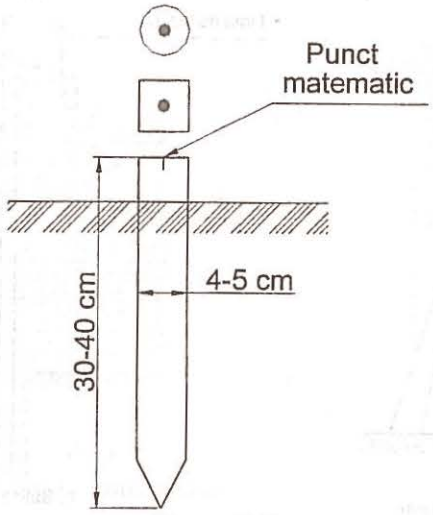


Figura 2.13
Tăruş de lemn

2.2.4.2. Semnalizarea punctelor

Pentru ca punctele topografice de planimetrie marcate pe teren să fie vizibile de la distanţe mari, cât şi pentru a putea fi vizate, deasupra mărcilor sau alături de ele, se construiesc semnale, a căror înălţime trebuie să asigure vizibilitatea reciprocă cu punctele învecinate, pe deasupra obstacolelor din teren.

Operaţia de însemnare a punctelor, cu semnale deasupra solului, se numeşte semnalizarea punctelor.

În afara jaloanelor din lemn (fig. 2.14), care sunt cele mai simple şi uzuale semnale topografice, se mai folosesc şi jaloane cu fanion sau heliotrop, care au la vârf un fanion din pânză colorată, sau globuri de sticlă de asemenea colorate în culori vii pentru a fi uşor de identificat.

Odată cu construirea semnalului se face şi descrierea lui topografică, împreună cu o schiţă, cuprinzând dimensiunile exacte ale semnalului, materialul din care a fost executat precum şi data efectuării lucrării.

Pentru punctele topografice mai importante se folosesc semnale cu fluturi, pe capre cu trei sau patru picioare (fig. 2.15) sau excepţional piramide (fig. 2.16) care sunt folosite în semnalizările punctelor geodezice ; se pot utiliza şi semnale demontabile din metal.

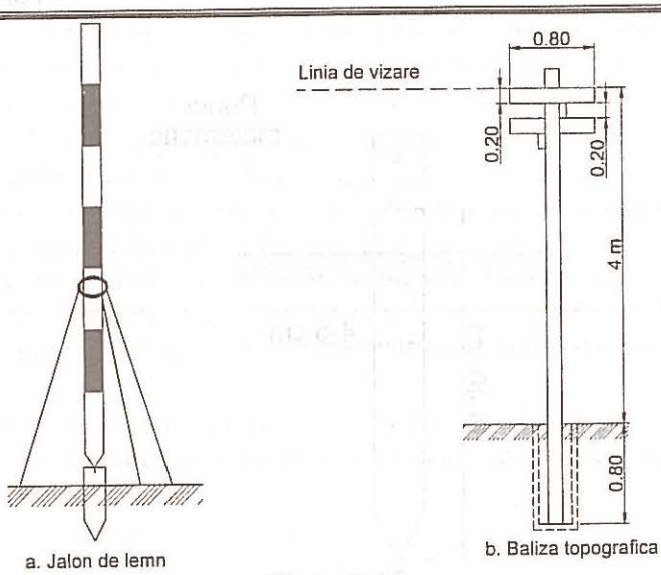


Figura 2.14
Semnalizarea punctelor topografice

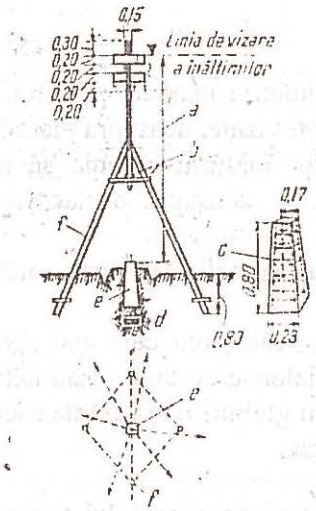


Figura 2.15 [11]
Semnal demontabil

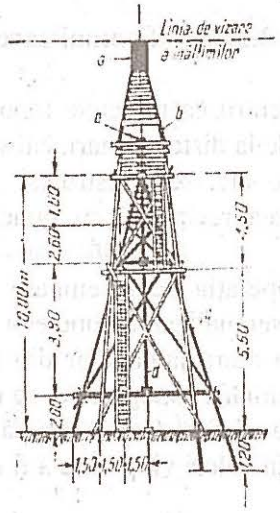


Figura 2.16 [11]
Piramidă

În zonele construite se utilizează ca semnale construcțiile mai înalte, ca: vârfurile turnurilor, coșurile de fabrici, paratrăsnetele, crucile de biserică, antene GSM, etc., sau semnale detașabile care se așează pe terasele construcțiilor.

Figura 2.17 [11]
Semnal pe terasa constructiei

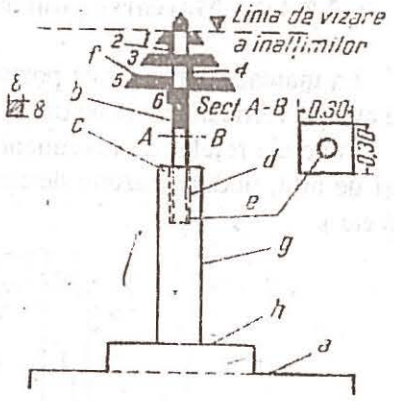


Figura 2.18 [11]
Semnal detaşabil

În terenurile acoperite cu păduri, se construiesc semnale pe arbori [11] (fig. 2.19). Ele se vor înălța la cel puțin 3 m deasupra pădurii pentu a fi văzut din toate direcțiile.

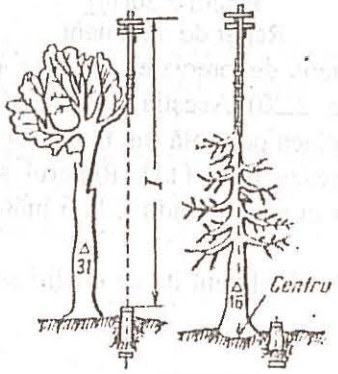


Figura 2.19[11]
Semnale în arbori

Condițiile ce tebuie să le îndeplinească semnalele topografice sunt:

1. să apară simetrice din orice direcție s-ar privi;
2. să fie bine fixate şi rigide pentru a nu fi răsturnate de vânt;
3. să fie construite din materiale rezistente;
4. să fie vizibile de la distanțe mari;
5. culoarea să fie în contrast față de mediul înconjurător;
6. picioarele semnalului trebuie aşezate astfel încât să nu împiedice vizele.

2.2.4.3. Marcarea punctelor altimetrice

La marcarea altimetrică poziția punctului topografic trebuie să fie strict fixată atât pe verticală cât și pe orizontală.

Punctele rețelei de nivelment sunt fixate în locuri ferite (pe clădiri sau lucrări de artă, poduri, castele de apă, pietre kilometrice de pe șosea sau cale ferată etc.).

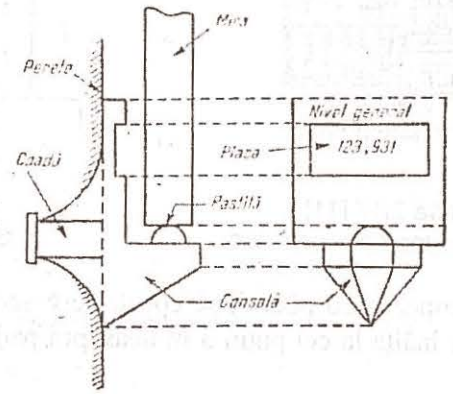


Figura 2.20[11]
Reper de nivelment

Reperii de nivelment de precizie, dacă se încastrează în clădiri, se numesc repere consolă (fig. 2.20). Aceștia se toarnă din fontă și au următoarele părți componente: coada, placa portcotă sau număr de ordine, consola și pastila semisferică pe care se așează mira [11]. Reperul se încastrează cu ciment, având coada adânc înfiptă în soclul clădirii, la o înălțime de circa 10 cm de la suprafața solului.

Alte forme ale reperilor de nivelment de pe clădiri se pot vedea în figura 2.21 de mai jos.

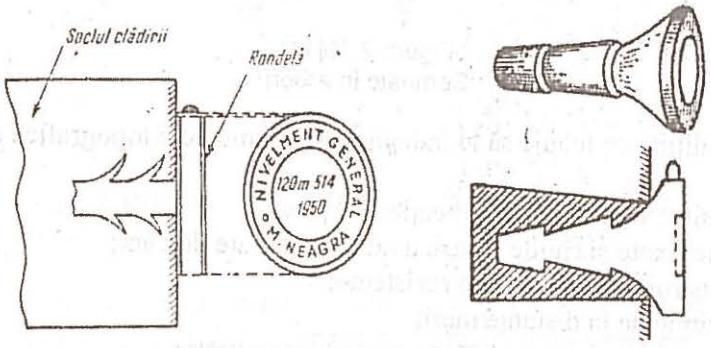


Figura 2.21[11]
Reperi de nivelment

Dat fiind că unele repere, sau mărci de nivelment, fixate în construcții își pot schimba ușor cota, de exemplu prin tasarea construcției respective, se construiesc și reperi de nivelment direct în teren, așa numitele repere altimetrice de adâncime (fig. 2.22), la a căror parte superioară este fixată marca și față de care se poate constata tasarea clădirii [11].

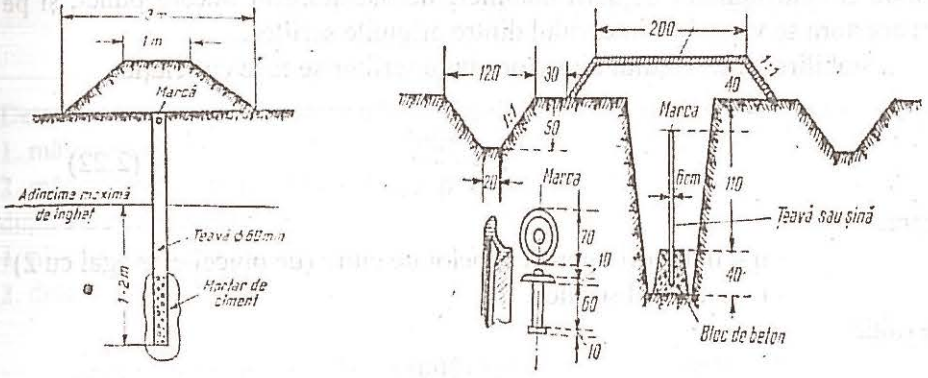


Figura 2.22[11]
Reperi de nivelment de adâncime

Acestea se construiesc subteran, la adâncimi de minim 2-2,50 m, pentru a fi cu 1-2 m sub adâncimea de îngheț, iar unele repere fundamentale se construiesc chiar mai adânc.

În nivelmentul tehnic de pe șantiere, pentru a materializa punctele de nivelment se pot folosi repere mai simple, din lemn, care să aibă 30 cm lungime sau dintr-o țeavă de metal încastrată în beton.

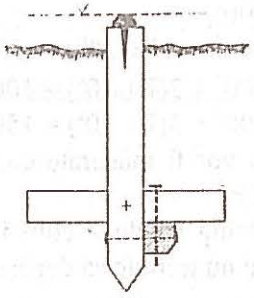


Figura 2.23[11]
Reper de nivelment de șantier

La efectuarea măsurătorilor unghiulare trebuie respectate următoarele:

1. unghiurile orizontale vor fi măsurate între orele $6^{00} - 11^{00}$; $16^{30} - 19^{30}$;
2. unghiurile verticale vor fi măsurate între orele $11^{00} - 15^{00}$;

3. se vor măsura dimineața punctele din partea de răsărit și după-amiaza cele de apus pentru a avea tot timpul soarele în spate;
4. se va întocmi la început un tur de orizont informativ în puncte, pentru a evita mișcări suplimentare în căutarea punctelor;
5. se vor măsura unghiurile prin metoda seriilor, respectând toate recomandările și restricțiile prevăzute;
6. se va stabili numărul de serii complete de măsurare în fiecare punct, și pe baza acestora se va stabili intervalul dintre originile seriilor.

Stabilirea intervalului dintre originile seriilor se face cu relația:

$$I = \frac{400^g}{q \cdot t} \qquad (2.22)$$

în care:

- q – numărul microscoapelor de citire (de obicei este egal cu 2)
- t – numărul seriilor

și rezultă:

$$I = \frac{200^g}{t} \qquad (2.23)$$

Pentru a se diminua erorile de perioadă scurtă ale gradațiilor limbului, se modifică intervalele calculate cu 10^c.

Exemplu: pentru un WILD T_2 – cu q = 2 și pentru t = 4 rezultă următoarele origini pentru cele 4 serii:

$$I = \frac{200^g}{4} = 50^g \qquad (2.24)$$

- seria 1 cu originea $0^g\ 00^c$
- seria 2 cu originea $0^g\ 00^c + \ I + 10^c = \ 50^g\ 10^c$
- seria 3 cu originea $0^g\ 00^c + 2(I + 10^c) = 100^g\ 20^c$
- seria 4 cu originea $0^g\ 00^c + 3(I + 10^c) = 150^g\ 30^c$

7. direcțiile în punctele rețelei vor fi măsurate cu teodolite de precizie (Wild T2, Theo 010A sau B, Wild T3);
8. la fiecare direcție se va măsura cu două coincidențe la micrometrul optic, diferența între două coincidențe nu trebuie să depășească 4^{cc};
9. închiderea unui tur de orizont să nu depășească $6^{cc}\sqrt{s}$, unde s = numărul de puncte vizate;
10. variația între diferitele direcții reduse la origine să nu depășească $15–20^{cc}$;
11. deoarece seriile sunt cicluri de observații independente, este permisă refacerea calării instrumentului între serii dacă este nevoie;
12. într-o serie se admit maximum 8 vize. Dacă trebuie măsurate mai mult de 8

12. într-o serie se admit maximum 8 vize. Dacă trebuie măsurate mai mult de 8 direcții dintr-o stație, se vor forma două grupe care să conțină 2 – 3 direcții comune, de preferință direcția de origine să fie comună pentru cele 2 – 3 grupe.

Urmează compensarea seriilor și stabilirea direcțiilor ce vor intra în compensare.

2.2.4.4. Efectuarea măsurătorilor liniare asupra bazei rețelei de triangulație.

Determinarea mărimii liniare a bazei rețelei de triangulație se poate face prin:
1. măsurarea directă;
2. măsurarea cu aparatură electrooptică;

după care se vor efectua:
1. nivelmentul bazei;
2. determinarea lungimii bazei.

2.2.5. Operații de calcul (Compensarea măsurătorilor)

În esență se urmărește o geometrizare a rețelei de triangulație, astfel încât figurile geometrice create să satisfacă următoarele condiții:
1. suma unghiurilor în triunghiuri să fie 200^g;
2. suma unghiurilor în jurul unui punct să fie 400^g;
3. între laturi și sinusurile unghiurilor opuse să existe raporturi de perfectă egalitate.

Primele două asigură condiții geometrice de bază, iar ultima asigură condiția de scară în rețeaua creată. Știut fiind că măsurătorile noastre unghiulare și liniare sunt afectate de erori, condițiile amintite mai sus, vor fi satisfăcute numai aproximativ, ceea ce impune efectuarea unor calcule de compensare.

Uzual, sunt folosite două metode de compensare a măsurătorilor:
1. metoda măsurătorilor condiționate;
2. metoda măsurătorilor indirecte.

Modul de compensare, algoritmul și exemple sunt studiate la cursul Teoria Prelucrării Măsurătorilor Geodezice.

3. REȚELE DE TRIANGULAȚIE LOCALĂ

3.1. *PRINCIPIILE INTERSECȚIILOR*

Una dintre metodele de determinare a punctelor geodezice de ordin inferior este aceea a intersecțiilor.

Acestea sunt de patru tipuri:

1. intersecții înainte (directe);
2. intersecții înapoi (retrointersecții);
3. intersecții laterale (combinate);
4. intersecții liniare.

Primele trei tipuri de intersecții utilizate pentru determinarea punctelor de ordinul IV și V sunt intersecții analitice obișnuite [11], adaptate la trei situații diferite care se pot prezenta în teren.

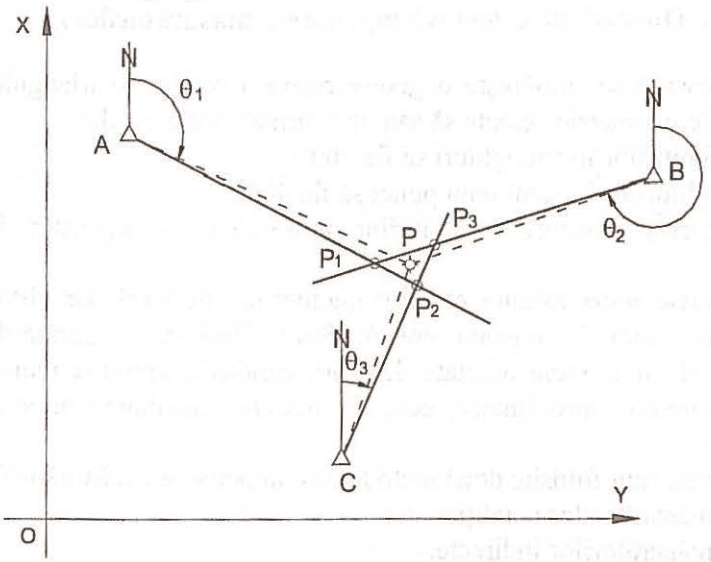


Figura 3.1
Triunghiul de eroare al intersecției topografice înainte

Se știe din geometria analitică faptul că având ecuațiile a două drepte de orientări cunoscute θ_1 și θ_2, trecând fiecare din ele prin câte un punct dat A și B (deci de coordonate cunoscute) se pot găsi coordonatele punctului nou P la intersecția celor două drepte date, rezolvând sistemul de ecuații format.

În practica topografică nu ne mulțumim cu coordonatele găsite pentru punctul P numai dintr-o singură combinație de două drepte și două puncte date,

ci se va aplica pentru control şi asigurarea preciziei, aceeaşi problemă la 2 – 3 combinaţii de câte două drepte şi două puncte date.

Din cauza erorilor inerente făcute în determinările coordonatelor punctelor A, B, C cât şi la determinarea orientărilor θ_1, θ_2, şi θ_3 nu va rezulta un punct unic de intersecţie P al direcţiilor AP, BP şi CP ci trei puncte P_1, P_2 şi P_3 care împreună formează aşa-zisul triunghi de eroare al intersecţiei. Aria acestui triunghi este cu atât mai mică cu cât determinările sunt mai îngrijite şi mai precise, dar niciodată nulă (fig. 3.1).

Dacă valorile coordonatelor punctelor P_1, P_2 şi P_3 sunt sensibil apropiate se va lua o valoare medie între ele şi acestea vor constitui drept coordonate probabile ale punctului căutat P.

3.1.1. Tipuri şi caracteristici ale intersecţiilor

1. Intersecţii înainte - când se staţionează numai în punctele vechi A, B, C şi se dau vize din ele spre punctul nou P (fig. 3.2) determinându-se unghiurile α, β, γ.

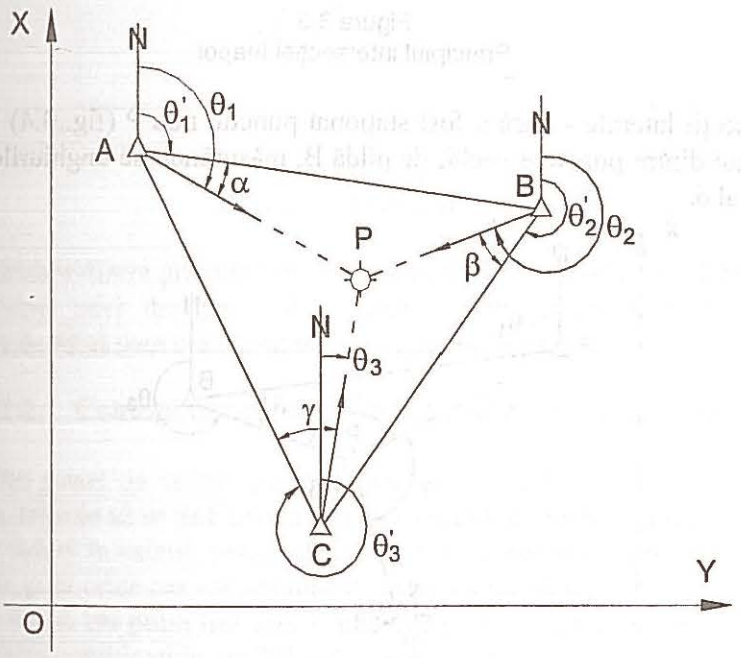


Figura 3.2
Principiul intersecţiei înainte

2. Intersecţii înapoi - dacă s-a staţionat numai în punctul nou P din care s-au măsurat direcţiile spre punctele vechi A, B, C determinându-se unghiurile α_1, β_1, γ_1. (fig. 3.3).

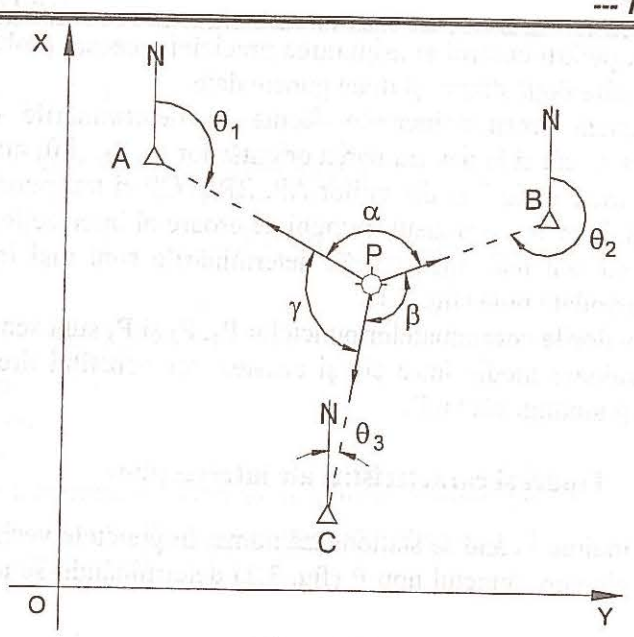


Figura 3.3
Principiul intersecției înapoi

3. Intersecții laterale - dacă a fost staționat punctul nou P (fig. 3.4) și încă cel puțin unul dintre punctele vechi, de pildă B, măsurându-se unghiurile α_2, β_2, γ_2 și unghiul δ.

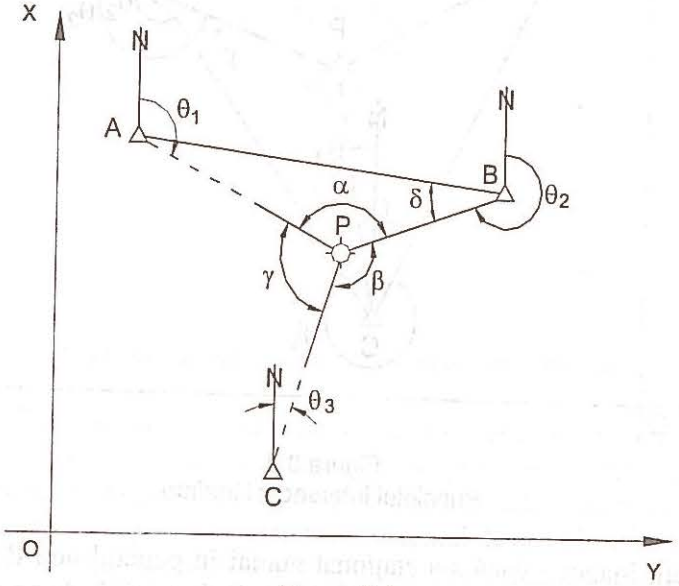


Figura 3.4
Principiul intersecției laterale

4. Intersecția liniară - dacă nu s-au măsurat elemente unghiulare având la dispoziție doar un instrument de măsurare a lungimilor cu care se determină distanțele de la punctele vechi A, respectiv B până la punctul nou P (fig. 3.5).

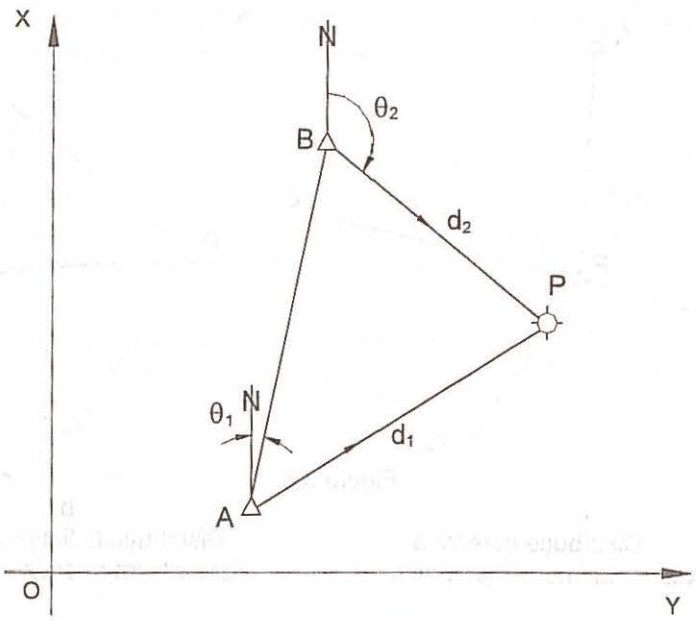


Figura 3.5
Principiul intersecției liniare

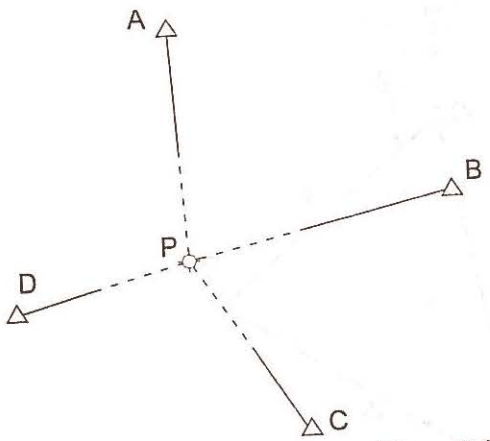
Oricare dintre primele trei variante se tratează teoretic la fel ca principiu de rezolvare, căci din punct de vedere matematic problema este aceeași indiferent de felul cum s-au obținut orientările θ_1, θ_2 și θ_3.

3.1.2. Condiții de aplicare în teren pentru intersecția înainte

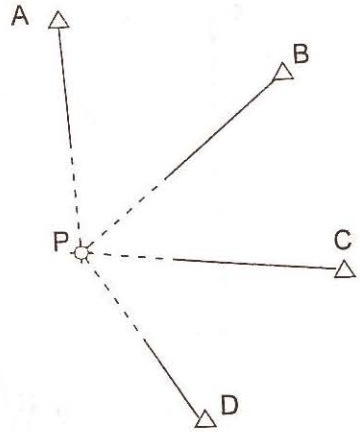
Din punct de vedere practic, pentru ca rezultatele obținute să fie cât mai bune, trebuie să se țină seama de câteva reguli de lucru și anume:

1. se vor folosi în calcul, pentru determinarea coordonatele punctelor, vize cât mai scurte și în orice caz cât se poate de egale ca lungime;
2. se vor folosi cel puțin trei vize venite din puncte vechi, luându-se două câte două în toate combinațiile posibile;
3. unghiurile optime sub care trebuie să se intersecteze vizele în punctul nou sunt între 30^G – 100^G, se exclud cu desăvârșire unghiurile obtuze sau prea ascuțite;
4. vizele folosite pentru calculul coordonatelor unui punct nou să fie răspândite cât mai uniform pe întregul tur de orizont. Sunt slabe determinările făcute din

vize care se grupează într-un singur cadran. În fig. (3.6 a și b) se observă care este situația optimă, admisibilă a distribuției vizelor iar în fig. (3.7) se observă cazul de distribuție a vizelor care trebuie evitat.



a.
Distribuție corectă a vizelor la intersecția înainte



b.
Distribuție la limită a vizelor la intersecția înainte

Figura 3.6

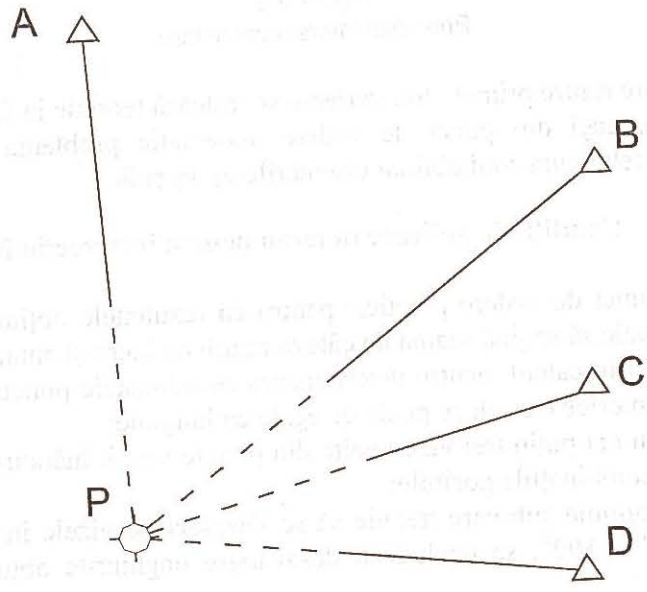


Figura 3.7
Distribuție defectuoasă a vizelor

3.2. *DETERMINAREA COORDONATELOR PUNCTELOR NOI PRIN INTERSECȚIE ÎNAINTE*

3.2.1. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înainte. Procedeul analitic.

1. Date inițiale:

Punctele vechi (de coordonate cunoscute) A, B și C sunt marcate, semnalizate, au fost recunoscute și identificate pe teren. (fig. 3.8).

Punctul P este marcat și semnalizat pe teren, nu are coordonate cunoscute, pentru el dorim să obținem coordonatele X și Y.

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie pentru măsurarea direcțiilor din punctele vechi A, B și C vizându-se și punctul nou P. Cu ajutorul acestor direcții se determină ungiurile α', α'', β', β'', γ' și γ''.

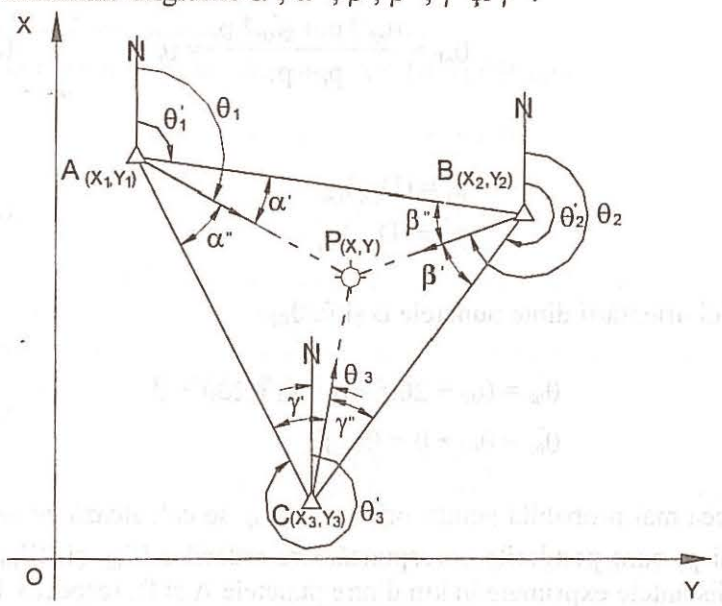


Figura 3.8
Intersecția înainte. Elemente. Procedeul analitic.

3. Etape de calcul:

a. calculul orientărilor dintre punctele vechi (AB, BC și AC);

$$\theta_1' = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{12}}{\Delta X_{12}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \qquad (3.1)$$

$$\theta_2' = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{23}}{\Delta X_{23}} = \text{arctg}\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} \qquad (3.1)$$
$$\theta_3' = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{31}}{\Delta X_{31}} = \text{arctg}\frac{Y_1 - Y_3}{X_1 - X_3}$$

b. calculul orientărilor dintre punctele vechi A, B şi C şi punctul nou P;
b1. calculul orientării dinte punctele B şi P, θ_{BP};

$$\theta'_{AP} = \theta_{AB} + \alpha' = \theta_1' + \alpha' \qquad (3.2)$$
$$\theta''_{AP} = \theta_{AC} - \alpha'' = \theta'_{CA} \mp \alpha'' = \theta_3' \mp 200^G - \alpha''$$

valoarea cea mai probabilă pentru orientarea θ_{AP} se calculează cu relaţia (3.3), unde p_1 şi p_2 sunt ponderile corespunzătoare valorilor θ'_{AP} şi θ''_{AP}, ele fiind egale cu distanţele exprimate în km dintre punctele A şi B, respectiv A şi C

$$\theta_{AP} = \frac{\theta'_{AP} * p_1 + \theta''_{AP} * p_2}{p_1 + p_2} = \theta_1 \qquad (3.3)$$

unde:

$$p_1 = (D_{AB})_{Km} \qquad (3.4)$$
$$p_2 = (D_{AC})_{Km}$$

b2. calculul orientării dinte punctele B şi P, θ_{BP}

$$\theta'_{BP} = \theta_{AB} \mp 200^g - \beta'' = \theta_1' \mp 200^g - \beta'' \qquad (3.5)$$
$$\theta''_{BP} = \theta_{BC} + \beta' = \theta_2' + \beta'$$

valoarea cea mai probabilă pentru orientarea θ_{BP} se calculează cu relaţia (3.6), unde p_1 şi p_3 sunt ponderile corespunzătoare valorilor θ'_{BP} şi θ''_{BP}, ele fiind egale cu distanţele exprimate în km dintre punctele A şi B, respectiv B şi C

$$\theta_{BP} = \frac{\theta'_{BP} * p_1 + \theta''_{BP} * p_3}{p_1 + p_3} = \theta_2 \qquad (3.6)$$

unde:

$$p_1 = (D_{AB})_{Km} \qquad (3.7)$$
$$p_3 = (D_{BC})_{Km}$$

b3. calculul orientării dintre punctele C şi P, θ_{CP}

$$\begin{aligned} \theta'_{CP} &= \theta_{BC} \mp 200^g - \gamma'' = \theta'_2 \pm 200^g - \gamma'' \\ \theta''_{CP} &= \theta_{CA} + \gamma' = \theta'_3 + \gamma' \end{aligned} \qquad (3.8)$$

valoarea cea mai probabilă pentru orientarea θ_{CP} se calculează cu relaţia (3.9), unde p_2 şi p_3 sunt ponderile corespunzătoare valorilor θ'_{CP} şi θ''_{CP}, ele fiind egale cu distanţele exprimate în km dintre punctele A şi C, respectiv B şi C

$$\theta_{CP} = \frac{\theta'_{CP} * p_3 + \theta''_{CP} * p_2}{p_2 + p_3} = \theta_3 \qquad (3.9)$$

unde:

$$\begin{aligned} p_2 &= (D_{AC})_{Km} \\ p_3 &= (D_{BC})_{Km} \end{aligned} \qquad (3.10)$$

c. determinarea coordonatelor punctului nou P.

Ecuaţiile analitice ale dreptelor AP, BP şi CP sunt:

$$\begin{aligned} &(AP) \quad Y - Y_1 = (X - X_1) * tg\theta_1 \\ &(BP) \quad Y - Y_2 = (X - X_2) * tg\theta_2 \\ &(CP) \quad Y - Y_3 = (X - X_3) * tg\theta_3 \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Pentru determinarea coordonatelor punctului P sunt strict necesare numai două ecuaţii din relaţiile (3.11).

Considerăm un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute format din primele două ecuaţii ale sistemului (3.11)

$$\begin{aligned} Y - Y_1 &= (X - X_1) * tg\theta_1 \\ Y - Y_2 &= (X - X_2) * tg\theta_2 \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Rezolvarea sistemului (3.12) conduce la aflarea sistemului de soluţii:

$$\begin{aligned} X &= \frac{Y_1 - Y_2 - X_1 * tg\theta_1 + X_2 * tg\theta_2}{tg\theta_2 - tg\theta_1} \\ Y &= Y_1 + (X - X_1) * tg\theta_1 \\ Y &= Y_2 + (X - X_2) * tg\theta_2 \end{aligned} \qquad (3.13)$$

valorile X şi Y generate de relaţiile (3.13) reprezintă coordonatele X' şi Y' ale punctului P_1 din fig. (3.1).

Considerând în continuare ecuațiile (1) și (3) din sistemul (3.11) și ecuațiile (2) și (3) din același sistem, vor rezulta două sisteme de două ecuații cu câte două necunoscute a căror rezolvare va conduce la determinarea coordonatelor X'' și Y'' ale punctului P_2 și a coordonatelor X''' și Y''' ale punctului P_3 (fig. 3.1).

Dacă între cele trei perechi de coordonate determinate ce corespund punctelor P_1, P_2 și P_3 sunt respectate relațiile (3.14)

$$\begin{aligned} |X_{max} - X_{min}| &\leq T_X \\ |Y_{max} - Y_{min}| &\leq T_Y \end{aligned} \qquad (3.14)$$

în care T_X și T_Y reprezintă toleranțe admisibile la determinarea coordonatelor X, respectiv Y,atunci vor fi admise ca valori probabile pentru coordonatele punctului P, coordonatele calculate cu relațiile (3.15).

$$\begin{aligned} X &= \frac{X'+X''+X'''}{3} \\ Y &= \frac{Y'+Y''+Y'''}{3} \end{aligned} \qquad (3.15)$$

3.2.1.1. Orientarea vizelor în stații de coordonate cunoscute

În punctul geodezic vechi 5 (fig. 3.9), de coordonate cunoscute, s-a staționat cu un instrument de precizie ridicată și s-au măsurat direcțiile către punctele vechi 1 și 6 precum și către punctele noi 2, 3 și 4 (tabelul 3-1).
Din coordonatele punctelor vechi se determină orientările θ_{5-1} și θ_{5-6}:

$$\theta_{51} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{51}}{\Delta X_{51}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_1 - Y_5}{X_1 - X_5} = 67^G.3443 \qquad (3.16)$$

$$\theta_{56} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{56}}{\Delta X_{56}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_6 - Y_5}{X_6 - X_5} = 223^G.3451$$

Aceste orientări sunt înregistrate în tabelul 3-1, coloana 5 și sunt scoase în evidență prin caracterele scrise bold italic.

În continuare se determină diferențele dintre unghiul de orientare și direcțiile măsurate în conformitate ce relațiile (3.17).

$$\alpha_5^{(i)} = \theta_{5i} - v_{5i} \qquad (3.17)$$

pentu oricare i=1, 2,…., 6, în care V_{5i} cu =1, 2,…., 6 sunt direcțiile orizontale din tabelul 3-1, coloana 3, compensate în stație, centrate, reduse și reduse la planul de proiecție. Valorile $\alpha_5^{(i)}$, calculate cu relațiile (3.17) se înregistrează în tabelul 3-1, în coloana 4, unghiuri de orientare α_i .

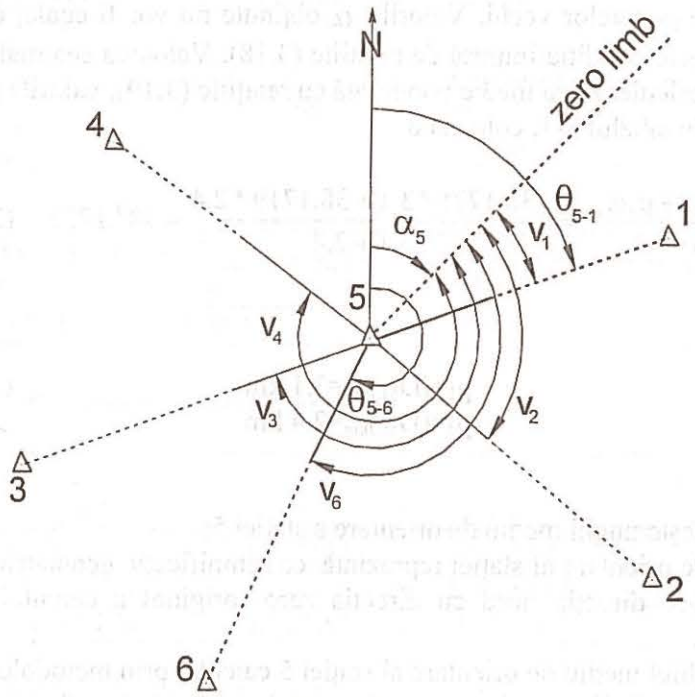


Figura 3.9
Orientarea vizelor în stația 5 de coordonate cunoscute

Calculul unghiului de orientare al stației 5

Tabelul 3-1

PS	PV	Dir. Măs. v_i [g c cc]	Unghi de orientare α_i [g c cc]	Orientarea vizelor [g c cc]	Pondere $D_{[Km]}$
1	2	3	4	5	6
5	1	29.1718	38.1725	67.3443	3.1
	2	115.7239		153.8961	
	6	185.1732	38.1719	223.3451	2.4
	3	213.9813		252.1535	
	4	303.5371		341.7093	

$$\alpha_5^{mediu} = 38^G.1722$$

Se obțin valori apropiate ca mărime care trebuie să satisfacă relația de toleranța (3.18).

$$\alpha_i^{max} - \alpha_i^{min} \leq T_\alpha \qquad (3.18)$$

Diferențele dintre valorile obținute sunt din cauza erorilor inerente ce însoțesc procesul de măsurare cât și din cauza erorilor conținute de coordonatele punctelor vechi. Valorile α_i obținute nu vor fi egale, ele trebuie însă să respecte condiția impusă de relațiile (3.18). Valoarea cea mai probabilă pentru α se calculează ca medie ponderată cu relațiile (3.19), valorile ponderilor se regăsesc în tabelul 3-1, coloana 6.

$$\alpha_5^{mediu} = \frac{p_1\alpha_{51} + p_2\alpha_{56}}{p_1 + p_2} == \frac{38.1725 * 3.1 + 38.1719 * 2.4}{3.1 + 2.4} = 38^G.1722 \qquad (3.19)$$

în care:

$$p_1=(D_{51})_{km}=3.1 \text{ km}$$
$$p_2=(D_{56})_{km}=2.4 \text{ km} \qquad (3.20)$$

Observații:

1. α_5 se numește unghi mediu de orientare a stației 5;
2. unghiul de orientare al stației reprezintă, ca semnificație geometrică, unghiul pe care-l face direcția nord cu direcția zero (origine) a cercului gradat al teodolitului.

Unghiul mediu de orientare al stației 5 calculat prin metodologia de mai sus servește în continuare la determinarea orientării vizelor din stația 5 către punctele noi 2, 3 și 4 cu relația (3.21)

$$\begin{aligned}
\theta_{5j} &= \alpha_5^{mediu} + v_{5j} \\
\theta_{52} &= \alpha_5^{mediu} + v_{52} = 38.1722 + 115.7239 = 153^G.8961 \\
\theta_{53} &= \alpha_5^{mediu} + v_{53} = 38.1722 + 213.9813 = 252^G.1535 \\
\theta_{54} &= \alpha_5^{mediu} + v_{54} = 38.1722 + 303.5371 = 341^G.7093
\end{aligned} \qquad (3.21)$$

- pentru oricare j=2, 3, 4.

Valorile orientărilor vizelor calculate cu relația (3.21) se regăsesc în tabelul 3-1, coloana 5 și vor fi folosite la calculul coordonatelor punctelor noi 2, 3 și 4 prin procedeul intersecțiilor.

3.2.1.2. Organizarea calculelor pentru intersecția înainte

Calculul orientării și distanței între două puncte vechi de coordonate cunoscute, precum și calculul coordonatelor punctului nou determinat prin intersecție înainte se recomandă să se efectueze în tabele.

Calculul orientării și distanței între punctele 55 și 59

Tabelul 3-2

Pct	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{55-59} = \frac{\Delta Y_{55-59}}{\Delta X_{55-59}}$	Orientrea $\theta_{55-59} = arctg\frac{\Delta Y_{55-59}}{\Delta X_{55-59}}$ [g c cc]	Distanța $D_{55-59} = \sqrt{(\Delta X_{55-59})^2 + (\Delta Y_{55-59})^2}$ [m]
55	10133.111	6959.121	-2.792112	121.8945	1854.242
59	9507.900	8704.780			
Δ	-625.211	1745.659			

Calculul coordonatelor punctului nou P

Tabelul 3-3

Pct.		X [m]	Tgθ	Y [m]	Orientarea [g c cc]
A	1	8953.380	0.349434	20210.610	221.4013
P		5130.209		18874.664	
B	2	3544.170	-0.910019	20317.990	352.9969

3.2.1.3. Exemplu. Orientarea vizelor în stații de coordonate cunoscute.

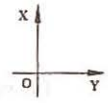
1. Orientarea vizelor în stația 55

a. Date inițiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 55, 59, 63, 85, 56,
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 3-4

Pct	X [m]	Y [m]
55	10133.111	6959.121
59	9507.900	8704.780
63	7794.871	7807.489
85	7536.629	6177.881
56	9648.995	5916.022



b. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stația 55 centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabelul 3-5

PS	PV	Direcții măsurate [g c cc]
55	59	382.7289
	913	16.9764
	63	38.6768
	85	79.4409
	56	133.1700

c. Schița vizelor:

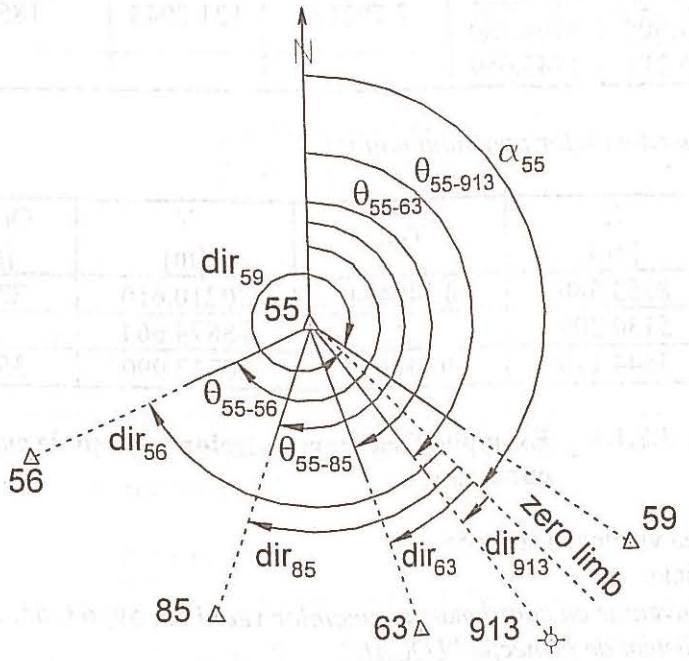


Figura 3.10
Schița vizelor în stația 55

Observații:

1. θ_{55-i} reprezintă orientările calculate dintre punctul vechi 55 și punctele i pentru oricare i = 59, 913, 63, 85, 56;
2. α_{55} reprezintă unghiul mediu de orientare în stația 55;
3. dir_i reprezintă direcțiile orizontale compensate în stația 55, centrate, reduse și reduse la planul de proiecție.

d. Etape de calcul pentru orientarea vizelor în stația 55

d1. Calculul orientărilor și distanței dintre punctele vechi

$$\theta_{55i} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{55i}}{\Delta X_{55i}} = \text{arctg}\frac{Y_i - Y_{55}}{X_i - X_{55}} \qquad (3.22)$$

$$D_{55i} = \sqrt{(X_i - X_{55})^2 + (Y_i - Y_{55})^2} \qquad (3.23)$$

Calculul orientării și distanței între punctele vechi

Tabel 3-6

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanța D_{AB} [m]
55	10133.111	6959.121	-2.792112	121.8945	1854.242
59	9507.900	8704.780			
Δ	-625.211	1745.659			
55	10133.111	6959.121	-0.362823	177.8423	2487.387
63	7794.871	7807.489			
Δ	-2338.240	848.368			
55	10133.111	6959.121	0.300884	218.6063	2711.467
85	7536.629	6177.881			
Δ	-2596.482	-781.240			
55	10133.111	6959.121	2.154647	272.3371	1149.967
56	9648.995	5916.022			
Δ	-484.116	-1043.099			

d2. Calculul unghiurilor α_{55}^{i} de orientare în stația 55

$$\begin{aligned}
\alpha_{55}^{59} &= \theta_{55-59} - \text{dir}_{59} = 121.8945 + 400 - 382.7289 = 139^{G}.1656 \\
\alpha_{55}^{63} &= \theta_{55-63} - \text{dir}_{63} = 177.8423 - 38.6768 = 139^{G}.1655 \\
\alpha_{55}^{85} &= \theta_{55-85} - \text{dir}_{85} = 218.6063 - 79.4409 = 139^{G}.1654 \\
\alpha_{55}^{56} &= \theta_{55-56} - \text{dir}_{56} = 272.3371 - 133.1700 = 139^{G}.1671
\end{aligned} \qquad (3.24)$$

d3. Calculul unghiului mediu de orientare în stația 55, α_{55}^{mediu}

$$p_i = D_{55\text{-}i}(\text{km}) \text{ pentru oricare } i = 59, 63, 85, 56$$

$$p_1 = 1.854 \text{ km}$$

$$p_2 = 2.487\,\text{km}$$
$$p_3 = 2.711\,\text{km} \qquad (3.25)$$
$$p_4 = 1.150\,\text{km}$$

$$\alpha_{55}^{mediu} = \frac{p_1\alpha_{55}^{59} + p_2\alpha_{55}^{63} + p_3\alpha_{55}^{85} + p_4\alpha_{55}^{56}}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} =$$

$$= \frac{1.854*139.1656 + 2.487*139.1655 + 2.711*139.1654 + 1.150*129.1671}{1.854 + 2.487 + 2.711 + 1.150} = (3.26)$$

$$= 139^G.1657$$

d4. Calculul orientării dintre punctul vechi 55 şi punctul nou 913

$$\theta_{55-913} = \alpha_{55}^{med} + dir_{913} = 139.1657 + 16.9764 = 156^G.1421 \qquad (3.27)$$

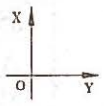
2. Orientarea vizelor din staţia 59

a. Date iniţiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 59, 77, 63, 55, Sistem de proiecţie "LOCAL"

Tabelul 3-7

Pct.	X [m]	Y [m]
59	9507.900	8704.780
77	7006.267	8873.495
63	7794.871	7807.489
55	10133.111	6959.121



b. Măsurători

Direcţiile orizontale compensate în staţia 59 centrate, reduse şi reduse la planul de proiecţie

Tabelul 3-8

PS	PV	Direcţii Măsurate [g c cc]
59	926	274.3233
	77	309.9136
	913	333.8175
	63	344.9188
	55	36.0940

c. Schița vizelor

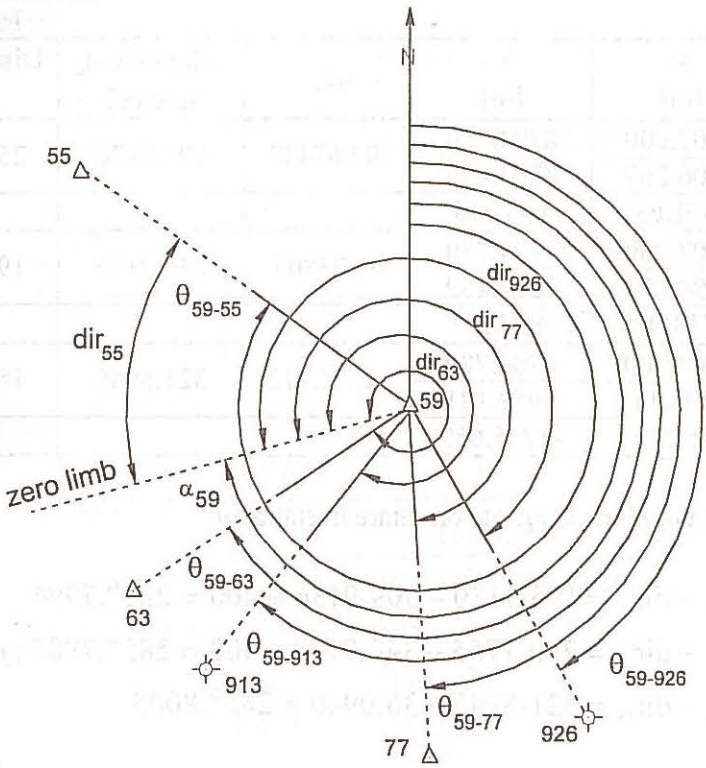


Figura 3.11
Schița vizelor în stația 59

Observațiii:

1. $\theta_{59\text{-}i}$ reprezintă orientările calculate dintre punctul vechi 59 și punctele i pentru oricare i = 926, 77, 913, 63, 55;

2. α_{59} reprezintă unghiul mediu de orientare în stația 59;

3. dir_i reprezintă direcțiile orizontale compensate în stația 59, reduse și reduse la planul de proiecție.

d. Etape de calcul pentru orientarea vizelor în stația 59

d1. Calculul orientărilor și distanței dintre punctele vechi

$$\theta_{59i} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{59i}}{\Delta X_{59i}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_i - Y_{59}}{X_i - X_{59}} \qquad (3.28)$$

$$D_{59i} = \sqrt{(X_i - X_{59})^2 + (Y_i - Y_{59})^2} \qquad (3.29)$$

Calculul orientării şi distanţei între punctele vechi

Tabel 3-9

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanţa D_{AB} [m]
59	9507.900	8704.780	-0.067442	195.7130	2507.316
77	7006.267	8873.495			
Δ	-2501.633	168.715			
59	9507.900	8704.780	0.523804	230.7175	1933.804
63	7794.871	7807.489			
Δ	-1713.029	-897.291			
59	9507.900	8704.780	-2.792112	321.8945	1854.242
55	10133.111	6959.121			
Δ	625.211	-1745.659			

d2. Calculul unghiurilor α_{59}^{i} de orientare în staţia 59

$$\alpha_{59}^{77} = \theta_{59-77} - dir_{77} = 195.7130 - 309.9136 + 400 = 285^{G}.7994$$
$$\alpha_{59}^{63} = \theta_{59-63} - dir_{63} = 230.1755 - 344.9188 + 400 = 285^{G}.7987 \quad (3.30)$$
$$\alpha_{59}^{55} = \theta_{59-55} - dir_{55} = 321.8945 - 36.0940 = 285^{G}.8005$$

d3. Calculul unghiului mediu de orientare în staţia 59 α_{59}^{mediu}

$$p_i = D_{59-i}(km) \text{ pentru oricare } i = 77, 63, 55$$
$$p_1 = 2.507\,km$$
$$p_2 = 1.934\,km \quad (3.31)$$
$$p_3 = 1.854\,km$$

$$\alpha_{59}^{med} = \frac{p_1\alpha_{59}^{77} + p_2\alpha_{59}^{63} + p_3\alpha_{59}^{155}}{p_1 + p_2 + p_3} =$$
$$= \frac{2.507 * 285.7994 + 1.934 * 285.7987 + 1.854 * 285.8005}{2.507 + 1.934 + 1.854} = 285^{G}.7995 \quad (3.32)$$

d4. Calculul orientării dintre punctul vechi 59 şi punctele noi 913 şi 926

$$\theta_{59-913} = \alpha_{59}^{med} + dir_{913} = 285.7995 + 333.8175 - 400 = 219^{G}.6170$$
$$\theta_{59-926} = \alpha_{59}^{med} + dir_{926} = 285.7995 + 274.3233 - 400 = 160^{G}.1228 \quad (3.33)$$

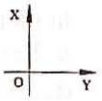
3. Orientarea vizelor în stația 63

a. Date inițiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 59, 77, 63, 55,
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 3-10

Pct	X [m]	Y [m]
63	7794.871	7807.489
55	10133.111	6959.121
59	9507.900	8704.780
77	7006.267	8873.495



b. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stația 63 centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabelul 3-11

PS	PV	Direcții măsurate [g c cc]
63	55	284.0989
	59	336.9735
	913	351.9322
	926	389.7671
	77	46.8040

c. Schița vizelor

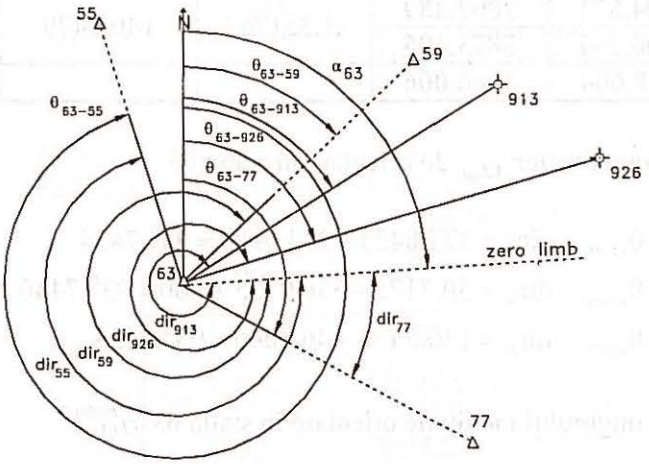


Figura 3.12
Schița vizelor în stația 63

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DE CONSTRUCȚII BUCUREȘTI
BIBLIOTECĂ
Nr.
Inv.

Observații:

1. $\theta_{63\text{-}i}$ reprezintă orientările calculate dintre punctul vechi 63 și punctele i pentru oricare i = 55, 59, 77;

2. α_{63} reprezintă unghiul mediu de orientare în stația 63;

3. dir_i reprezintă direcțiile orizontale compensate în stația 63, reduse și reduse la planul de proiecție.

d. Etape de calcul pentru orientarea vizelor în stația 63

d1. Calculul orientărilor și distanței dintre punctele vechi:

$$\theta_{63i} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{63i}}{\Delta X_{63i}} = \text{arctg}\frac{Y_i - Y_{63}}{X_i - X_{63}} \qquad (3.34)$$

$$D_{63i} = \sqrt{(X_i - X_{63})^2 + (Y_i - Y_{63})^2} \qquad (3.35)$$

Calculul orientării și distanței între punctele vechi

Tabel 3-12

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanța D_{AB} [m]
63	7794.871	7807.489	-0.362823	377.8423	2487.387
55	10133.111	6959.121			
Δ	2338.240	-848.368			
63	7794.871	7807.489	0.523804	30.7175	1933.804
59	9507.900	8704.780			
Δ	1713.029	897.291			
63	7794.871	7807.489	-1.351763	140.5479	1325.996
77	7006.267	8873.495			
Δ	-788.604	1066.006			

d2. Calculul unghiurilor α_{63}^{i} de orientare în stația 63

$$\alpha_{63}^{55} = \theta_{63\text{-}55} - dir_{55} = 377.8423 - 284.0989 = 93^{G}.7434$$
$$\alpha_{63}^{59} = \theta_{63\text{-}59} - dir_{59} = 30.7175 - 336.9735 + 400 = 93^{G}.7440 \qquad (3.36)$$
$$\alpha_{63}^{77} = \theta_{63\text{-}77} - dir_{77} = 140.5479 - 46.8040 = 93^{G}.7439$$

d3. Calculul unghiului mediu de orientare în stația 63 α_{63}^{mediu}

$p_i = D_{63i}(km)$ oricare ar fi i=55, 59, 77

$$p_1 = 2.487\text{km}$$
$$p_2 = 1.934\text{km} \qquad (3.37)$$
$$p_3 = 1.326\text{km}$$

$$\alpha_{63}^{med} = \frac{p_1 \cdot \alpha_{63}^{55} + p_2\alpha_{63}^{59} + p_3\alpha_{63}^{77}}{p_1 + p_2 + p_3} =$$
$$= \frac{2.487 * 93.7434 + 1.934 * 93.7440 + 1.326 * 93.7439}{2.487 + 1.934 + 1.326} = 93^G.7437 \qquad (3.38)$$

d4. Calculul orientării dintre punctul vechi 63 şi punctele noi 913 şi 926

$$\theta_{63-913} = \alpha_{63}^{med} + \text{dir}_{913} = 93.7437 + 351.9322 = 45^G.6759$$
$$\theta_{63-926} = \alpha_{63}^{med} + \text{dir}_{926} = 93.7437 + 389.7671 = 83^G.5108 \qquad (3.39)$$

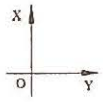
4. Orientarea vizelor în staţia 77

a. Date iniţiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 92, 63, 59,
Sistem de proiecţie "LOCAL",

Tabelul 3-13

Pct	X [m]	Y [m]
77	7006.267	8873.495
92	6058.081	7560.912
63	7794.871	7807.489
59	9507.900	8704.780



b. Măsurători

Direcţiile orizontale compensate în staţia 77 centrate, reduse şi reduse la planul de proiecţie

Tabelul 3-14

PS	PV	Direcţii măsurate [g c cc]
77	92	334.5030
	63	14.8771
	913	52.3590
	59	70.0422
	926	107.5675

c. Schița vizelor

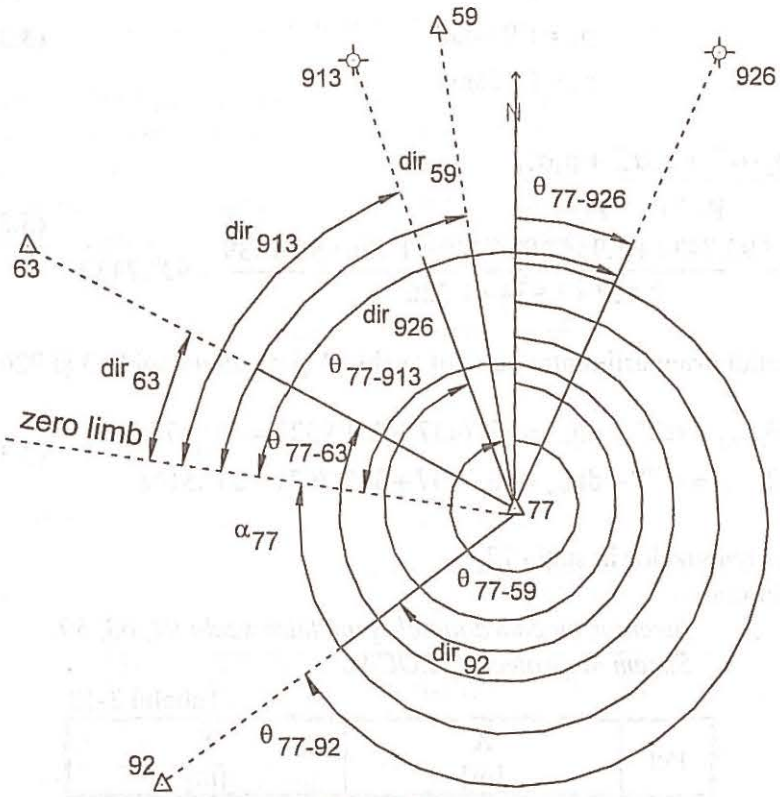


Figura 3.13
Schița vizelor în stația 77

Observații:

1. $\theta_{77\text{-}i}$ reprezintă orientările calculate dintre punctul vechi 77 și punctele i pentru oricare i = 92, 63, 59;
2. α_{77} reprezintă unghiul mediu de orientare în stația 77;
3. dir_i reprezintă direcțiile orizontale compensate în stația 77, reduse și reduse la planul de proiecție.

d. Etape de calcul pentru orientarea vizelor în stația 77

d1. Calculul orientărilor și distanței dintre punctele vechi:

$$\theta_{77i} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{77i}}{\Delta X_{77i}} = \text{arctg}\frac{Y_i - Y_{77}}{X_i - X_{77}} \qquad (3.40)$$

$$D_{55i} = \sqrt{(X_i - X_{55})^2 + (Y_i - Y_{55})^2} \qquad (3.41)$$

Calculul orientării şi distanţei între punctele vechi

Tabel 3-15

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AB} [g c cc]	Distanţa D_{AB} [m]
77	7006.267	8873.495	1.384310	260.1737	1619.238
92	6058.081	7560.912			
Δ	-948.186	-1312.583			
77	7006.267	8873.495	-1.351763	340.5479	1325.996
63	7794.871	7807.489			
Δ	788.604	-1066.006			
77	7006.267	8873.495	-0.067442	395.7130	2507.316
59	9507.900	8704.780			
Δ	2501.633	-168.715			

d2. Calculul unghiurilor α_{77}^{i} de orientare în staţia 77

$$\begin{aligned}
\alpha_{77}^{92} &= \theta_{77-92} - dir_{92} = 260.1737 - 334.5030 + 400 = 325^{G}.6707 \\
\alpha_{77}^{63} &= \theta_{77-63} - dir_{63} = 340.5479 - 14.8771 = 325^{G}.6708 \\
\alpha_{77}^{591} &= \theta_{77-59} - dir_{59} = 395.7130 - 70.0422 = 325^{G}.6708
\end{aligned} \tag{3.42}$$

d3. Calculul unghiului mediu de orientare în staţia 77 α_{77}^{mediu}

$$\begin{aligned}
p_i &= D_{77\text{-}i}\,(\text{km}) \text{ oricare ar fi } i = 92, 63, 59 \\
p_1 &= 1.619\text{km} \\
p_2 &= 1.326\text{km} \\
p_3 &= 2.507\text{km}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\alpha_{77}^{med} = \frac{p_1\alpha_{77}^{92} + p_2\alpha_{77}^{63} + p_3\alpha_{77}^{59}}{p_1 + p_2 + p_3} = \tag{3.44}$$

$$= \frac{1.619 * 325.6707 + 1.326 * 325.6708 + 2.507 * 325.6708}{1.619 + 1.326 + 2.507} = 325^{G}.6708$$

d4. Calculul orientării dintre punctul vechi 77 şi punctele noi 913 şi 926

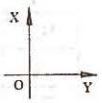
$$\begin{aligned}
\theta_{77-913} &= \alpha_{77}^{med} + dir_{913} = 325.6708 + 52.3590 = 378^{G}.0298 \\
\theta_{77-926} &= \alpha_{77}^{med} + dir_{926} = 325.6708 + 107.5675 = 33^{G}.2383
\end{aligned} \tag{3.45}$$

3.2.1.4. Exemple. Calculul coordonatelor punctului 913 prin intersecție înainte cu orientări. Procedeul analitic.

1. Date inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 55,59, 63, 77,
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 3-16



Pct	X [m]	Y [m]
55	10133.111	6959.121
59	9507.900	8704.780
63	7794.871	7807.489
77	7006.267	8873.495

Orientările calculate din punctele vechi către punctul nou 913

Tabelul 3-17

PS	PV	Orientări [g c cc]
59	913	219.6170
55		156.1421
63		45.6759
77		378.0298

2. Schița vizelor

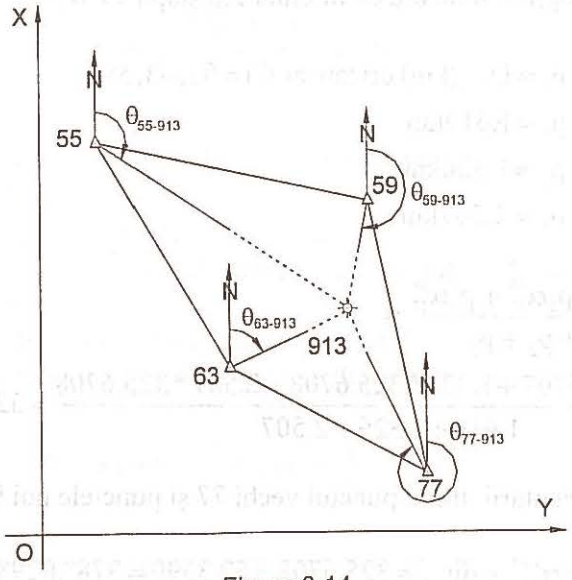


Figura 3.14
Intersecția înainte cu orientări

3. Etape de calcul

a. Calculul coordonatelor punctului nou de îndesire 913

$$X^1_{913} = \frac{Y_{59} - Y_{55} + X_{55} * tg\theta_{55-913} - X_{59} * tg\theta_{59-913}}{tg\theta_{55-913} - tg\theta_{59-913}}$$

$$Y^1_{913} = Y_{59} + (X_{913} - X_{59}) * tg\theta_{59-913} \qquad (3.46)$$

$$Y^2_{913} = Y_{55} + (X_{913} - X_{55}) * tg_{55-913}$$

$$X^2_{913} = \frac{Y_{63} - Y_{77} + X_{77} * tg_{77-913} - X_{63} * tg\theta_{63-913}}{tg_{77-913} - tg_{63-913}}$$

$$Y^3_{913} = Y_{63} + (X_{913} - X_{63}) * tg\theta_{63-913} \qquad (3.47)$$

$$Y^4_{913} = Y_{77} + (X_{913} - X_{77}) * tg\theta_{77-913}$$

Calculul coordonatelor punctului nou 913

Tabelul 3-18

Pct.		X [m]	tgθ	Y [m]	Orientarea [g c cc]
59	1	9507.900	0.318281	8704.780	219.6170
913		8429.965		8361.693 / 8361.693	
55	2	10133.111	-0.823519	6959.121	156.1421
63	1	7794.871	0.872611	7807.489	45.6759
913		8429.969		8361.683 / 8361.683	
77	2	7006.267	-0.359494	8873.495	378.0298

b. Calculul valorilor probabile ale coordonatelor punctului 913

$$X_{913} = \frac{X^1_{913} + X^2_{913}}{2} = \frac{8429.965 + 8429.969}{2} = 8429.967m$$

$$Y_{913} = \frac{Y^1_{913} + Y^2_{913} + Y^3_{913} + Y^4_{913}}{4} = \qquad (3.48)$$

$$= \frac{8361.693 + 8361.963 + 8361.683 + 8361.683}{4} = 8361.688m$$

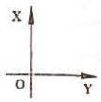
$$X_{913} = 8429.967 \text{ m} \quad Y_{913} = 8361.688 \text{ m} \qquad (3.49)$$

3.2.1.5. Calculul coordonatelor punctului 913 prin intersecție înainte cu unghiuri $(\alpha_i \beta_i)$. Procedeul analitic.

1. Date inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 59, 77, 55, 63,
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 3-19



Pct	X [m]	Y [m]
59	9507.900	8704.780
77	7006.267	8873.495
55	10133.111	6959.121
63	7794.871	7807.489

2. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stație, centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabelul 3-20

PS	PV	Direcții măsurate [g c cc]
59	77	309.9136
	913	333.8175
77	59	70.0422
	913	52.3590
63	55	284.0989
	913	351.9322
55	63	38.6768
	913	16.9764

3. Calculul unghiurile orizontale măsurate în punctele cunoscute α_i, β_i

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= dir_{913} - dir_{77} = 333.8175 - 309.9136 = 23^G.9039 \\
\alpha_2 &= dir_{59} - dir_{913} = 70.0422 - 52.3590 = 17^G.6832 \\
\beta_4 &= dir_{913} - dir_{55} = 351.9322 - 284.0989 = 67^G.8333 \\
\alpha_4 &= dir_{63} - dir_{913} = 38.6768 - 16.9764 = 21^G.7004
\end{aligned} \qquad (3.50)$$

4. Schița vizelor

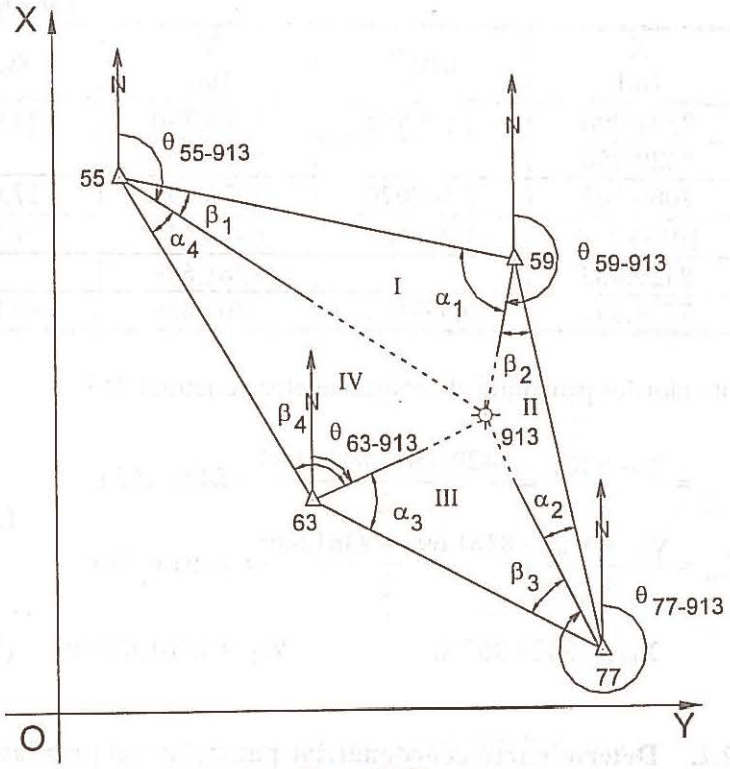


Figura 3.15
Intersecția înainte cu unghiuri

5. Etape de calcul

a. Calculul coordonatelor punctului nou 913 din triunghiul 59-77-913

$$X^1_{913} = X_{59} + \frac{Y_{59} - Y_{77} + (X_{77} - X_{59})ctg\beta_2}{ctg\alpha_2 + ctg\beta_2}$$

$$Y^1_{913} = Y_{59} + \frac{X_{77} - X_{59} + (Y_{77} - Y_{59})ctg\beta_2}{ctg_2 + ctg\beta_2} \qquad (3.51)$$

b. Calculul coordonatelor punctului nou 913 din triunghiul 55-913-63

$$X^2_{913} = X_{63} + \frac{Y_{63} - Y_{55} + (X_{55} - X_{63})ctg\beta_4}{ctg\alpha_4 + ctg\beta_4}$$

$$Y^2_{913} = Y_{63} + \frac{X_{55} - X_{63} + (Y_{55} - Y_{63})ctg\beta_4}{ctg\alpha_4 + ctg\beta_4} \qquad (3.52)$$

Calculul coordonatelor punctului nou 913

Tabelul 3-21

Pct	X [m]	$ctg\beta_i^{\alpha_i}$	Y [m]	α_i, β_i
59	9507.900	2.536894	8704.780	23.9039
913	8429.950		8361.690	
77	7006.267	3.507070	8873.495	17.6832
55	10133.111	2.819165	6959.121	21.7004
913	8429.983		8361.689	
63	7794.871	0.553169	7807.489	67.8333

c. Calculul valorilor probabile ale coordonatelor punctului 913

$$X_{913} = \frac{X^1_{913} + X^2_{913}}{2} = \frac{8429.950 + 8429.983}{2} = 8429.967\text{m}$$
$$Y_{913} = \frac{Y^1_{913} + Y^2_{913}}{2} = \frac{8361.690 + 8361.689}{2} = 8361.690\text{m} \qquad (3.53)$$

$$X_{913} = 8429.967 \text{ m} \qquad Y_{913} = 8361.690 \text{ m} \qquad (3.54)$$

3.2.2. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înainte. Procedeul trigonometric.

1. Date inițiale:

Punctele vechi (de coordonate cunoscute) $A(X_1,Y_1)$ și $B(X_2,Y_2)$ sunt marcate și semnalizate, au fost recunoscute și identificate pe teren. (fig. 3.16).

Punctul P este marcat și semnalizat pe teren, nu are coordonate cunoscute, pentru el dorim să obținem coordonatele X și Y.

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie pentru măsurarea direcțiilor din punctele vechi A și B vizându-se punctul nou P. Cu ajutorul acestor direcții se determină ungiurile α, β.

3. Etape de rezolvare:

a. calculul orientării $\theta_{A\text{-}B}$ din coordonatele punctelor vechi:

$$\theta_{AB} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB}} = \text{arctg} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \qquad (3.55)$$

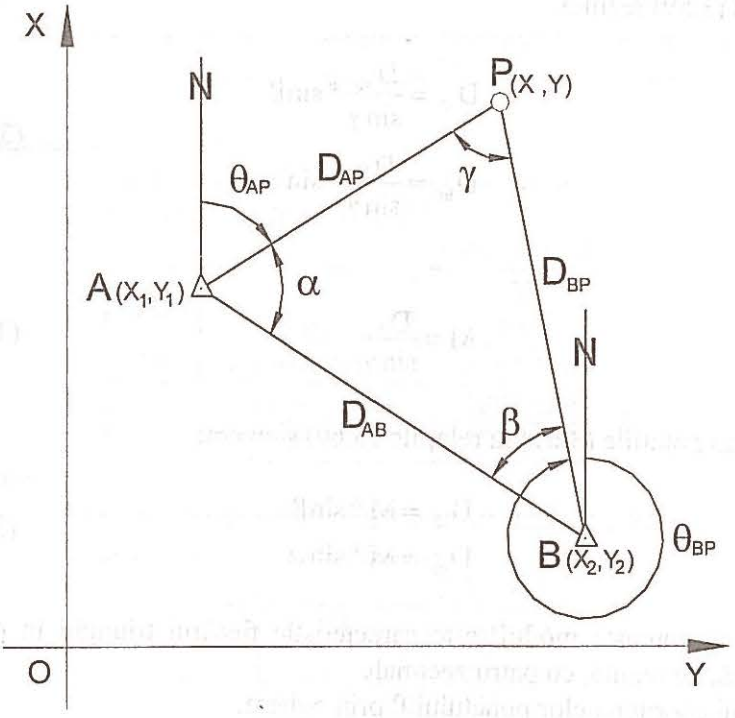


Figura 3.16
Intersecția înainte. Procedeul trigonometric

b. Calculul orientărilor θ_{AP} şi θ_{BP}

$$\theta_{AP} = \theta_{AB} - \alpha$$
$$\theta_{BP} = \theta_{AB} \mp 200^g + \beta \qquad (3.56)$$

c. Calculul distanței D_{AB} din coordonate:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \qquad (3.57)$$

d. Calculul ungiului γ

$$\gamma = 200^g - (\alpha + \beta) \qquad (3.58)$$

e. Calculul distanțelor $D_{A\text{-}P}$ şi $D_{B\text{-}P}$ cu ajutorul teoremei sinusurilor:

$$\frac{D_{AB}}{\sin\gamma} = \frac{D_{AP}}{\sin\beta} = \frac{D_{BP}}{\sin\alpha} \qquad (3.59)$$

din relația (3.59) rezultă:

$$D_{AP} = \frac{D_{AB}}{\sin\gamma} * \sin\beta$$
$$D_{BP} = \frac{D_{AB}}{\sin\gamma} * \sin\alpha \qquad (3.60)$$

notăm :

$$M = \frac{D_{AB}}{\sin\gamma} \qquad (3.61)$$

introducem notațiile (3.61) în relațiile (3.60) şi avem:

$$D_{AP} = M * \sin\beta$$
$$D_{BP} = M * \sin\alpha \qquad (3.62)$$

unde M se numeşte modul, este caracteristic fiecărui triunghi în parte şi se calculează, de regulă, cu patru zecimale

f. Calculul coordonatelor punctului P prin radiere:

$$X_P' = X_1 + D_{AP} * \cos\theta_{AP} = X_1 + \Delta X_{AP}$$
$$X_P'' = X_2 + D_{BP} * \cos\theta_{BP} = X_2 + \Delta X_{BP} \qquad (3.63)$$
$$Y_P' = Y_1 + D_{BP} * \sin\theta_{AP} = Y_1 + \Delta Y_{AP}$$
$$Y_P'' = Y_2 + D_{BP} * \sin\theta_{BP} = Y_2 + \Delta Y_{BP}$$

Punem condiția:

$$\left|X_P' - X_P''\right| \le T_X$$
$$\left|X_P' - X_P''\right| \le T_Y \qquad (3.64)$$

dacă condiția (3.63) este îndeplinită atunci vor fi admise ca valori probabile a coordonatelor punctului P coordonatele calculate cu relațiile (3.64).

$$X_P = \frac{X_P' + X_P''}{2}$$
$$Y_P = \frac{Y_P' + Y_P''}{2} \qquad (3.65)$$

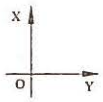
3.2.2.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului 926. Procedeul trigonometric. Metoda radierii.

1. Date inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 59, 63, 77,
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 3-22

Pct	X [m]	Y [m]
59	9507.900	8704.780
63	7794.871	7807.489
77	7006.267	8873.495



2. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stație, centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabelul 3-23

PS	PV	Direcții măsurate [g c cc]
59	926	274.3233
	77	309.9136
	63	344.9188
63	59	336.9735
	926	389.7671
	77	46.8040
77	63	14.8771
	59	70.0422
	926	107.5675

3. Unghiurilor orizontale α_i, β_i din direcțiile compensate în stațiile 59,63,77, centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= dir_{63} - dir_{926} = 344.9188 - 274.3233 = 70^G.5955 \\
\beta_1 &= dir_{926} - dir_{59} = 389.7671 - 336.9735 = 52^G.7936 \\
\alpha_2 &= dir_{77} - dir_{926} = 46.8040 - 389.7671 + 400 = 57^G.0369 \\
\beta_2 &= dir_{926} - dir_{63} = 107.5675 - 14.8771 = 92^G.6904 \\
\alpha_3 &= dir_{77} - dir_{926} = 309.9136 - 274.3233 = 35^G.5903 \\
\beta_3 &= dir_{926} - dir_{59} = 107.5675 - 70.0422 = 37^G.5253
\end{aligned} \qquad (3.66)$$

4. Schița vizelor

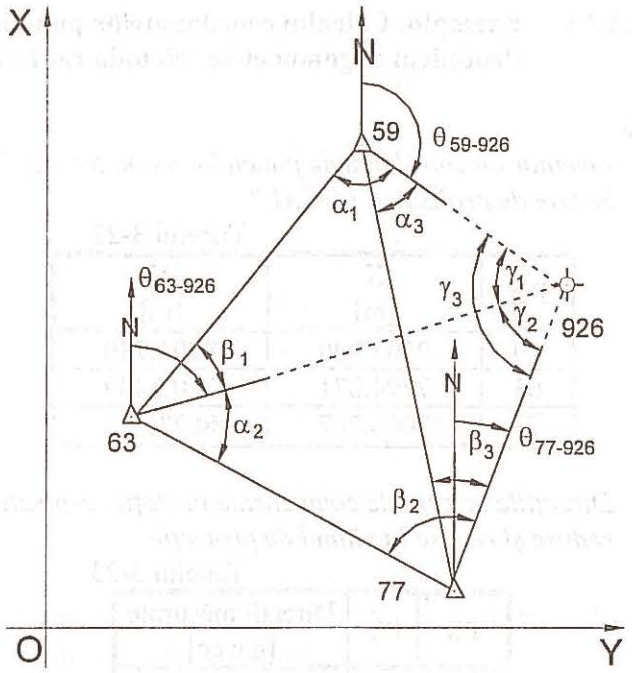


Figura 3.17
Intersecția înainte. Procedeul trigonometric

5. Etape de calcul:

a. Triunghiul 59 – 63 – 926

a1. Calculul orientării θ_{59-63} și distanței D_{59-63}

$$\theta_{59-63} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{59-63}}{\Delta X_{59-63}} = \text{arctg}\frac{Y_{63} - Y_{59}}{X_{63} - X_{59}} \qquad (3.67)$$

$$D_{59-63} = \sqrt{(X_{63} - X_{59})^2 + (Y_{63} - Y_{59})^2} \qquad (3.68)$$

Calculul orientării și distanței între punctele vechi

Tabel 3-24

Pct.	X [m]	Y [m]	$\text{tg}\,\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanța D_{AB} [m]
59	9507.900	8704.780	0.523804	230.7175	1933.804
63	7794.871	7807.489			
Δ	-1713.029	-897.291			

a2. Calculul orientărilor $\theta_{59-926}, \theta_{63-926}$

$$\begin{aligned}\theta_{59-926} &= \theta_{59-63} - \alpha_1 = 230.7175 - 70.5955 = 160^G.1220\\ \theta_{63-926} &= (\theta_{59-63} + 200) + \beta_1 - 400 =\\ &= 230.7175 + 200 + 52.7936 - 400 = 83^G.5111\end{aligned} \qquad (3.69)$$

a3. Calculul unghiului γ_1

$$\gamma_1 = 200 - \alpha_1 - \beta_1 = 200 - 70.5955 - 52.7936 = 76^G.6109 \qquad (3.70)$$

a4. Calculul distanțelor r_{59-926}, r_{63-926}

$$\frac{D_{59-63}}{\sin\gamma_1} = \frac{r_{59-926}}{\sin\beta_1} = \frac{r_{63-926}}{\sin\alpha_1} \qquad (3.71)$$

$$M_1 = \frac{D_{59-63}}{\sin\gamma_1} = \frac{1933.804}{\sin 76.6109} = 2072.0825 \qquad (3.72)$$

$$\begin{aligned}r_{59-926} &= M_1 \sin\beta_1 = 2072.0825 * \sin 52.7936 = 1528.047\text{m}\\ r_{63-926} &= M_1 \sin\alpha_1 = 2072.0825 * \sin 70.5955 = 1854.958\text{m}\end{aligned} \qquad (3.73)$$

a5. Calculul coordonatelor pct. 926 prin dublă radiere din punctele 59 şi 63

$$\begin{aligned}X^1_{926} &= X_{59} + r_{59-926} * \cos\theta_{59-926} =\\ &= 9507.900 + 1528.047 * \cos 160.1220 = 8269.965\text{m}\\ Y^1_{926} &= Y_{59} + r_{59-926} * \sin\theta_{59-926} =\\ &= 8704.780 + 1528.047 * \sin 160.1220 = 9600.574\text{m}\\ X^2_{926} &= X_{63} + r_{63-926} * \cos\theta_{63-926} =\\ &= 7794.871 + 1854.958 * \cos 83.5111 = 8269.965\text{m}\\ Y^2_{926} &= Y_{63} + r_{63-926} * \sin\theta_{63-926} =\\ &= 7807.489 + 1854.958 * \sin 83.5111 = 9600.574\text{m}\end{aligned} \qquad (3.74)$$

b. Triunghiul 63 - 926 - 77

b1. Calculul orientării θ_{63-77} şi distanței D_{63-77}

$$\theta_{63-77} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{63-77}}{\Delta X_{63-77}} = \text{arctg}\frac{Y_{77} - Y_{63}}{X_{77} - X_{63}} \tag{3.75}$$

$$D_{63-77} = \sqrt{(X_{77} - X_{63})^2 + (Y_{77} - Y_{63})^2} \tag{3.76}$$

Calculul orientării şi distanței între punctele vechi

Tabel 3-2

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanța D_{AB} [m]
63	7794.871	7807.489	-1.351763	140.5479	1325.996
77	7006.267	8873.495			
Δ	-788.604	1066.006			

b2. Calculul orientărilor $\theta_{63-926}, \theta_{77-926}$

$$\begin{aligned}\theta_{63-926} &= \theta_{63-77} - \alpha_2 = 140.5479 - 57.0369 = 83^G.5110\\ \theta_{77-926} &= (\theta_{63-77} + 200) + \beta_2 - 400 = \\ &= 140.5479 + 200 + 92.6904 - 400 = 33^G.2383\end{aligned} \tag{3.77}$$

b3. Calculul unghiului γ_2

$$\gamma_2 = 200^G - (\alpha_2 + \beta_2) = 200 - 57.0369 - 92.6904 = 50.2727 \tag{3.78}$$

b4. Calculul distanțelor r_{63-926}, r_{77-926}

$$\frac{D_{63-77}}{\sin\gamma_2} = \frac{r_{63-926}}{\sin\beta_2} = \frac{r_{77-926}}{\sin\alpha_2} \tag{3.79}$$

$$M_2 = \frac{D_{63-77}}{\sin\gamma_2} = \frac{1325.996}{\sin 50.2727} = 1867.2600 \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}r_{63-926} &= M_2 \sin\beta_2 = 1867.2602 * \sin 92.6904 = 1854.965\text{m}\\ r_{77-926} &= M_2 \sin\alpha_2 = 1867.2602 * \sin 57.0369 = 1457.943\text{m}\end{aligned} \tag{3.81}$$

b5. Calculul coordonatelor punctului 926 prin radiere din punctele 63 şi 77

$$
\begin{aligned}
X^3_{926} &= X_{63} + r_{63-926} * \cos\theta_{63-926} = \\
&= 7794.871 + 1854.965 * \cos 83.5110 = 8269.970\text{m} \\
Y^3_{926} &= Y_{63} + r_{63-926} * \sin\theta_{63-926} = \\
&= 7807.489 + 1854.965 * \sin 83.5110 = 9600.580\text{m} \\
X^4_{926} &= X_{77} + r_{77-926} * \cos\theta_{77-926} = \\
&= 7006.267 + 1457.943 * \cos 33.2383 = 8269.970\text{m} \\
Y^4_{926} &= Y_{77} + r_{77-926} * \sin\theta_{77-926} = \\
&= 8873.495 + 1457.943 * \sin 33.2383 = 9600.580\text{m}
\end{aligned}
\qquad (3.82)
$$

c. Triunghiul 59 – 926 - 77

c1. Calculul orientării θ_{59-77} şi distanţei D_{59-77}

$$\theta_{59-77} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{59-77}}{\Delta X_{59-77X}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_{77} - Y_{59}}{X_{77} - X_{59}} \qquad (3.83)$$

$$D_{59-77} = \sqrt{(X_{77} - X_{59})^2 + (Y_{77} - Y_{59})^2} \qquad (3.84)$$

Calculul orientării şi distanţei între punctele vechi

Tabel 3-26

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanţa D_{AB} [m]
59	9507.900	8704.780	-0.067442	195.7130	2507.316
77	7006.267	8873.495			
Δ	-2501.633	168.715			

c2. Calculul orientărilor $\theta_{59-926}, \theta_{77-926}$

$$
\begin{aligned}
\theta_{59-926} &= \theta_{59-77} - \alpha_3 = 195.7130 - 35.5903 = 160^G.1227 \\
\theta_{77-926} &= (\theta_{59-77} + 200) + \beta_3 - 400 = \\
&= 195.7130 + 200 + 37.5253 - 400 = 33^G.2383
\end{aligned}
\qquad (3.85)
$$

c3. Calculul unghiului γ_3

$$\gamma_3 = 200^G - \alpha_3 - \beta_3 = 200 - 35.5903 - 37.5253 = 126^G.8844 \qquad (3.86)$$

c4. Calculul distanțelor r_{59-926}, r_{77-926}

$$\frac{D_{59-77}}{\sin\gamma_3} = \frac{r_{59-926}}{\sin\beta_3} = \frac{r_{770-926}}{\sin\alpha_3} \tag{3.87}$$

$$M_3 = \frac{D_{59-77}}{\sin\gamma_3} = \frac{2507.316}{\sin 126.8844} = 2748.8006 \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned} r_{59-926} &= M_3 \sin\beta_3 = 2748.8006 * \sin 37.5253 = 1528.060\text{m} \\ r_{77-926} &= M_3 \sin\alpha_3 = 2748.8006 * \sin 35.5903 = 1457.914\text{m} \end{aligned} \tag{3.89}$$

c5. Calculul coordonatelor punctului 926 prin dublă radiere din punctele 59, 77

$$\begin{aligned} X_{926}^5 &= X_{59} + r_{59-926} * \cos\theta_{59-926} = \\ &= 9507.900 + 1528.060 * \cos 160.1227 = 8269.945\text{m} \\ Y_{926}^5 &= Y_{59} + r_{59-926} * \sin\theta_{59-926} = \\ &= 9507.900 + 1528.060 * \sin 160.1227 = 9600.567\text{m} \\ X_{926}^6 &= X_{77} + r_{77-926} * \cos\theta_{77-926} = \\ &= 7006.267 + 1457.914 * \cos 33.2383 = 8269.945\text{m} \\ Y_{926}^6 &= Y_{77} + r_{77-926} * \cos\theta_{77-926} = \\ &= 8873.495 + 1457.914 * \sin 33.2383 = 9600.567\text{m} \end{aligned} \tag{3.90}$$

6. Calculul coordonatelor cele mai probabile ale punctului 926

$$\begin{aligned} X_{926} &= \frac{X_{926}^1 + X_{926}^2 + X_{926}^3 + X_{926}^4 + X_{926}^5 + X_{926}^6}{6} = \\ &= \frac{8269.965 + 8269.965 + 8269.970 + 8269.970 + 8269.945 + 8269.945}{6} = \\ &= 8269.960\text{m} \\ Y_{926} &= \frac{Y_{926}^1 + Y_{926}^2 + Y_{926}^3 + Y_{926}^4 + Y_{926}^5 + Y_{926}^6}{6} = \\ &= \frac{9600.574 + 9600.574 + 9600.580 + 9600.580 + 9600.567 + 9600.567}{6} = \\ &= 9600.574\text{m} \end{aligned} \tag{3.91}$$

$$X_{926}=8269.960\text{ m} \qquad Y_{926}=9600.574\text{ m} \tag{3.92}$$

3.3. *DETERMINAREA COORDONATELOR PUNCTELOR NOI PRIN INTERSECȚIE ÎNAPOI*

Principial, problema este de a găsi coordonatele unui punct nou P (X,Y) prin vize date exclusiv din acest punct nou P spre trei puncte vechi A (X_1,Y_1), B (X_2,Y_2) și C (X_3,Y_3) - date prin coordonatele lor. Soluția acestei probleme a fost dată de Snellius în 1624 și perfectată de Pothénot în 1692. Se mai numește "Problema Pothénot" sau "Problema hărții"[26].

Spre deosebire de intersecția înainte, care impunea staționarea cu aparatul în cel puțin trei puncte de coordonate cunoscute, din care sunt vizate puncte vechi și punctul nou ce urmează a fi determinat, intersecția înapoi presupune staționarea exclusiv în punctul de coordonate necunoscute și măsurarea direcțiilor spre cel puțin trei puncte vechi (de coordonate cunoscute).

Metoda se numește intersecție înapoi deoarece măsurarea direcțiilor se face în sens invers decât la intersecția înainte.

În teren, culegerea datelor se face mult mai ușor și mai comod, se staționează într-un singur punct, nu în trei sau patru puncte ca la intersecția înainte.

Această metodă se aplică obligatoriu când în regiune nu există vizibilitate decât spre puncte vechi dar neaccesibile (cruci de biserici, semnale, coșuri de fum precum și atunci când efectuăm măsurători de control în drumuiri.

3.3.1. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înapoi. Soluția analitică (Procedeul Delambre)

1. Date inițiale

Punctele vechi de coordonate cunoscute A, B și C (fig. 3.18) sunt marcate, semnalizate, au fost recunoscute și identificate pe teren. Punctul P este marcat și eventual semnalizat pe teren, nu are coordonate cunoscute, pentru el dorim să determinăm coordonatele X și Y.

2. Măsurători

Sunt folosite instrumente de precizie pentru măsurarea direcțiilor din punctul P către punctele vechi A, B și C (figura 3.18). Cu ajutorul acestor direcții se determină unghiurile α și β.

Dorim să determinăm, pe baza coordonatelor punctelor vechi vizate și a unghiurilor α și β determinate, coordonatele X și Y ale punctului nou P.

3. Etape de calcul:

a. în prima etapă, specifică retrointersecțiilor, se vor găsi orientările θ_1, θ_2, θ_3 ale vizelor AP, BP, CP;

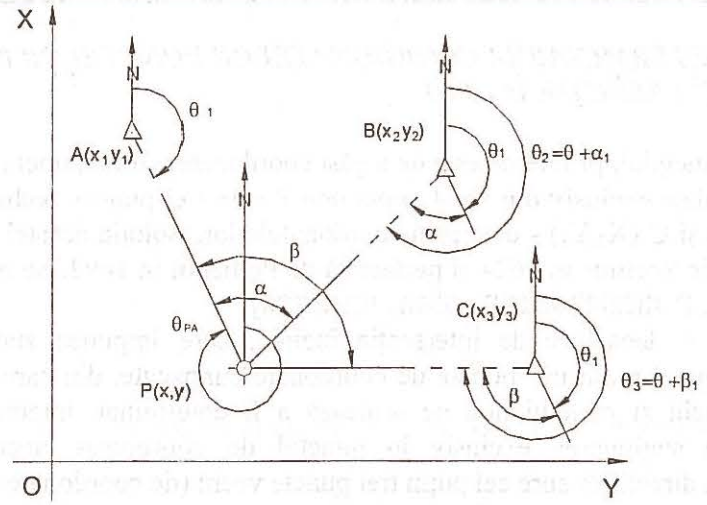


Figura 3.18
Intersecție înapoi. Procedeul analitic

b. în a doua etapă având trei drepte de orientare cunoscută şi trecând fiecare prin câte un punct de coordonate cunoscute, se vor rezolva nişte intersecții obişnuite (înainte) cunoscute de la paragraful 3.2.

Deci, doar prima parte a problemei este nouă pentru a cărei rezolvare se vor scrie cele trei ecuații analitice, teoretice ale celor trei drepte care trec prin punctul P şi respectiv prin $A(X_1,Y_1)$, $B(X_2,Y_2)$ şi $C(X_3,Y_3)$.

$$\begin{aligned} Y-Y_1&=(X-X_1)*tg\theta_1 \\ Y-Y_2&=(X-X_2)*tg\theta_2 \\ Y-Y_3&=(X-X_3)*tg\theta_3 \end{aligned} \qquad (3.93)$$

Se observă din fig. (3.18) că dacă $\theta_{AP} = \theta_1$ atunci:

$$\begin{aligned} \theta_{BP}&=\theta_1+\alpha=\theta_2 \\ \theta_{CP}&=\theta_1+\beta=\theta_3 \end{aligned} \qquad (3.94)$$

Se introduc relațiile (3.94) în relațiile (3.93) şi obținem:

$$\begin{aligned} Y-Y_1&=(X-X_1)*tg\theta_1 \\ Y-Y_2&=(X-X_2)*tg(\theta_1+\alpha) \\ Y-Y_3&=(X-X_3)*tg(\theta_1+\beta) \end{aligned} \qquad (3.95)$$

Sistemul (3.95) este un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, necunoscutele sunt $tg\theta$, X şi Y. Acest sistem se poate rezolva prin metoda substituției.

Pentru început vom considera ecuațiile 1 și 2 ale sistemului (3.95). Este știut din trigonometrie că:

$$tg(\theta_1 + \alpha) = \frac{tg\theta_1 + tg\alpha}{1 - tg\theta_1 * tg\alpha} \qquad (3.96)$$

Relația (3.96) o înlocuim în ecuația 2 a sistemului (3.95) și vom obține:

$$Y - Y_2 = (X - X_2) * \frac{tg\theta_1 + tg\alpha}{1 - tg\theta_1 * tg\alpha} \qquad (3.97)$$

eliminând numitorul ecuația (3.97) devine:

$$(Y-Y_2)*(1-tg\theta 1*tg\alpha=(X-X_2)*(tg\theta_1+tg\alpha) \qquad (3.98)$$

Sistemul format din primele două ecuații ale sistemului (3.95) are forma:

$$\begin{aligned} &Y-Y_1=(X-X_1)*tg\theta_1 \\ &(Y-Y_2)*(1-tg\theta_1*tg\alpha)=(X-X_2)*(tg\theta_1+tg\alpha) \end{aligned} \qquad (3.99)$$

Explicităm necunoscuta Y din prima ecuație a sistemului (3.99)

$$Y=Y_1+(X-X_1)*tg\theta_1 \qquad (3.100)$$

și o înlocuim în ecuația 2 a sistemul (3.99) obținând:

$$(Y_1+X*tg\theta_1-X_1*tg\theta_1-Y_2)*(1-tg\theta_1*tg\alpha) = (X-X_2)*(tg\theta_1+tg\alpha) \qquad (3.101)$$

efectuăm calculele și avem:

$$\begin{aligned} &Y_1-Y_2+X*tg\theta_1-X_1*tg\theta_1-Y_1*tg\theta_1*tg\alpha+Y_2*tg\theta_1*tg\alpha- \\ &-X*tg\theta_1^2*tg\alpha+X_1*tg\theta_1^2*tg\alpha=X*tg\theta_1-X_2*tg\theta_1+X*tg\alpha-X_2*tg\alpha \end{aligned} \qquad (3.102)$$

Reducând termenii asemenea, separând termenii care conțin necunoscuta X în membrul întâi și grupându-i într-o formă oarecum simetrică avem:

$$\begin{aligned} &X*tg\alpha + X*tg\theta_1^2*tg\alpha = Y_1 - Y_2 - X_1*tg\theta_1 + X_2*tg\theta_1 - \\ &-Y_1*tg\theta_1*tg\alpha + Y_2*tg\theta_1*tg\alpha + X_2*tg\alpha + X_1*tg\theta_1^2*tg\alpha \end{aligned} \qquad (3.103)$$

Dăm factor comun și grupăm convenabil termenii din membrul drept

$$\begin{aligned} &X*(1+tg^2\theta_1)*tg\alpha = Y_1 - Y_2 + (X_2 - X_1)*tg\theta_1 + \\ &+ (Y_2-Y_1)*tg\theta_1*tg\alpha + (X_2 + X_1*tg^2\theta_1)*tg\alpha \end{aligned} \qquad (3.104)$$

Ecuația (3.104) a rezultat prin substituirea necunoscutei Y din ecuați a sistemului (3.95) în ecuația 2 a aceluiași sistem.

Procedăm la fel între ecuațiile 1 și 3 ale sistemului (3.95) și va rezul ecuație asemănătoare cu ecuația (3.104) în care α va fi înlocuit cu β coordonatele X_2 și Y_2 vor fi înlocuite cu X_3 și Y_3 corespunzătoare punctului (

$$X*(1+tg^2\theta_1)*tg\beta = Y_1 - Y_3 + (Y_3 - Y_1)*tg\theta_1*tg\beta + \\ + (X_3 - X_1)*tg\theta_1 + (X_3 + X_1*tg^2\theta_1)*tg\beta \qquad (3.105)$$

În continuarea rezolvării dorim să eliminăm necunoscutele X pentr obține o ecuație cu o singură necunoscută θ. Vom împărți membru cu mem ecuația (3.104) la ecuația (3.105):

$$\frac{X*(1+tg^2\theta_1)*tg\alpha}{X*(1+tg^2\theta_1)*tg\beta} = \\ = \frac{Y_1 - Y_2 + (X_2 - X_1)*tg\theta_1 + (Y_2 - Y_1)*tg\theta_1 tg\alpha + (X_2 + X_1*tg^2\theta_1)*tg\alpha}{Y_1 - Y_3 + (X_3 - X_1)*tg\,\theta_1 + (Y_3 - Y_1)*tg\theta_1*tg\beta + (X_3 + X_1*tg^2\theta_1)*tg\beta} \qquad (3.106)$$

facem simplificări în partea dreaptă a proporției (3.106) și obținem:

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{Y_1 - Y_2 + (X_2 - X_1)*tg\theta_1 + (Y_2 - Y_1)*tg\theta_1*tg\alpha + (X_2 + X_1*tg^2\theta_1)*tg\alpha}{Y_1 - Y_3 + (X_3 - X_1)*tg\,\theta_1 + (Y_3 - Y_1)*tg\theta_1*tg\beta + (X_3 + X_1 tg^2\theta_1)*tg\beta} \qquad (3.107)$$

în acestă proporție înmulțim numărătorii cu $tg\beta$ și numitorii cu $tg\alpha$. Țin seama de faptul că:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} \text{ și } tg\beta = \frac{1}{ctg\beta} \qquad (3.108)$$

rezultă:

$$1 = \frac{(Y_1 - Y_2)ctg\alpha + (X_2 - X_1)tg\theta_1 ctg\alpha + (Y_2 - Y_1)tg\theta_1 tg\alpha ctg\alpha + (X_2 + X_1 tg^2}{(Y_1 - Y_3)ctg\beta + (X_3 - X_1)tg\,\theta_1 ctg\beta + (Y_3 - Y_1)tg\theta_1 tg\beta ctg\beta + (X_3 + X_1 tg^2} \qquad (3.109)$$

se știe că:

$$tg\alpha*ctg\alpha=1 \\ tg\beta*ctg\beta=1 \qquad (3.110)$$

rezultă:

$$l=\frac{(Y_1-Y_2)*ctg\alpha+(X_2-X_1)*tg\theta_1*ctg\alpha+(Y_2-Y_1)*tg\theta_1+X_2+X_1*tg^2\theta_1}{(Y_1-Y_3)*ctg\beta+(X_3-X_1)*tg\,\theta_1*ctg\beta+(Y_3-Y_1)*tg\theta_1+X_3+X_1*tg^2\theta_1} \tag{3.110a}$$

facem produsul mezilor şi al extremilor în proporţia (3.110a)

$$(Y_1-Y_2)*ctg\alpha+(X_2-X_1)*tg\theta_1ctg\alpha+(Y_2-Y_1)*tg\theta_1+X_2+X_1*tg^2\theta_1)=$$
$$(Y_1-Y_3)*ctg\beta+(X_3-X_1)*tg\theta_1*ctg\beta+(Y_3-Y_1)*tg\theta_1+X_3+X_1*tg^2\theta_1) \tag{3.111}$$

reducem termenii asemenea şi grupăm după $tg\theta_1$

$$(X_2-X_1)*tg\theta_1*ctg\alpha+(Y_2-Y_1)*tg\theta_1-(X_3-X_1)*tg\theta_1*ctg\beta-$$
$$-(Y_3+Y_1)*tg\theta_1=(Y_1-Y_3)*ctg\beta+X_3-X_2-(Y_1-Y_2)*ctg\alpha \tag{3.112}$$

$$tg\theta_1*((X_2-X_1)*ctg\alpha-(X_3-X_1)*ctg\beta+Y_2-Y_1-Y_3+Y_1)=$$
$$(X_3-X_2)+(Y_1-Y_3)*ctg\beta+-(Y_1-Y_2)*ctg\alpha \tag{3.113}$$

$$tg\theta_1=\frac{(Y_2-Y_1)*ctg\alpha+(Y_1-Y_3)*ctg\beta+X_3-X_2}{(X_2-X_1)*ctg\alpha+(X_1-X_3)*ctg\beta+Y_2-Y_3} \tag{3.114}$$

Formula (3.114) este relaţia care permite determinarea funcţiei trigonometrice $tg\theta_1$.

Prin analogie cu formula

$$tg\theta_{AB}=\frac{\Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB}}=\frac{Y_B-Y_A}{X_B-X_A} \tag{3.115}$$

în relaţia (3.114) numitorul joacă rolul lui ΔX_{AB} iar numărătorul joacă rolul lui ΔY_{AB} din relaţia (3.103), θ_1 având valori cuprinse între 0^G şi 400^G.

Conform ipotezelor stabilite la începutul demonstraţiei, funcţie de θ_1, de unghiurile α şi β putem determina orientările celorlalte vize

$$\theta_2=\theta_{BP}=\theta_1+\alpha$$
$$\theta_3=\theta_{CP}=\theta_1+\beta \tag{3.116}$$

Pentru a avea un control al calculelor, este necesar ca în teren să fie vizate patru puncte de coordonate cunoscute, determinându-se al treilea unghi γ

(fig.3.19) care să fie utilizat în calcule pentru control cât şi pentru a obţine valori medii ale orientarilor.

Din prima combinatie, conform relatiilor (3.114) şi (3.116) se calculează valorile θ'_{AP}, θ'_{BP}, θ'_{CP}.

Orientarea θ_{DP} se calculează cu relaţia:

$$\theta'_{DP} = \theta'_{AP} + \beta + \gamma \qquad (3.117)$$

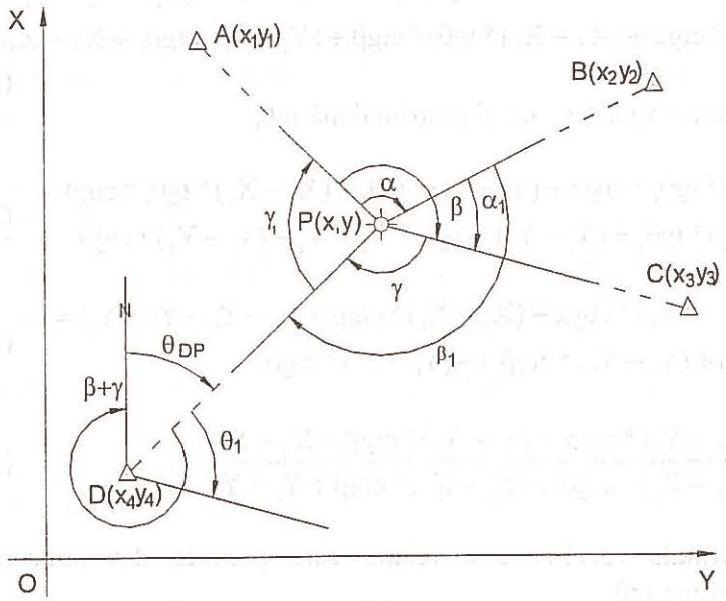


Fig. 3.19
Intersectia inapoi cu patru puncte vizate

Se vor determina, în mod asemănător aceleaşi orientări folosind unghiurile α_1 si β_1 astfel:

θ''_{BP} din calcule cu relaţia (3.114)

$$\begin{aligned} \theta''_{CP} &= \theta_{BP} + \alpha_1 \\ \theta''_{DP} &= \theta_{BP} + \beta_1 \\ \theta''_{AP} &= \theta_{BP} + \beta_1 + \gamma_1 \end{aligned} \qquad (3.118)$$

Între valorile obţinute pentru aceaşi orientare trebuie să fie satisfăcut relaţia:

$$\left|\theta''_{iP} - \theta'_{iP}\right| \le T_\theta \qquad (3.119)$$

pentru oricare i = B, C, D, A

Valorile cele mai probabile pentru orientările determinate se calculeaz

ca medie aritmetică sau ponderată a celor două orientări determinate pentru aceeaşi dreaptă.
Valorile unghiurilor α si β trebuie să respecte condiţia:

$$\alpha < \beta \qquad (3.120)$$

Se recomandă ca acestea să fie situate în zona măsurată din fig. (3.20)

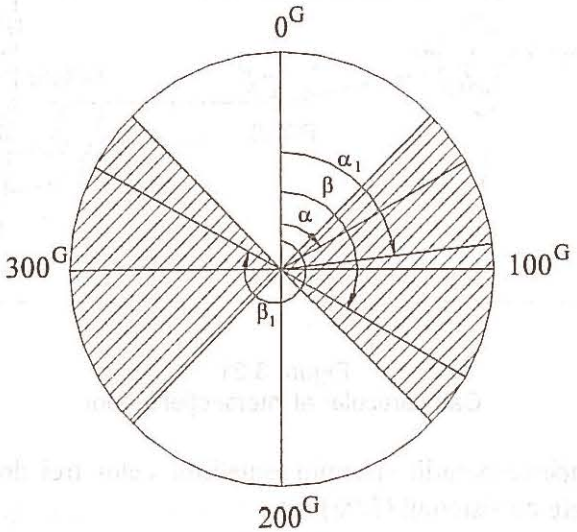


Fig. 3.20
Zona optimă pentru mărimea unghiurilor α şi β

Cu acesta se încheie prima etapă de calcul, specifică retrointersecţiilor, prin care s-au determinat orientările dreptelor AP, BP şi CP.

În continuare se trece la calculul coordonatelor punctului P prin intersecţie înainte folosind relaţiile (3.13) şi (3.15).

3.3.2. Caz particular la intersecţia înapoi

Dacă unghiul α este apropiat de 100^G, deci $\alpha \approx 100^G$ şi unghiul β este apropiat de 200^G, deci $\beta \approx 200^G$, nu poate fi aplicată cu succes formula (3.12) deoarece funcţia ctg α are valoare foarte mare, ea tinde spre ∞.
Pentru a rezolva această problema, în acest caz, vom considera dispozitivul de calcul format din trei puncte vechi A, B, C cu unghiurile α şi β ca în fig. (3.21).
Din fig (3.21) se observă că:

$$\theta_{AP} = \theta_2 = \theta_1 - \alpha$$
$$\theta_{CP} = \theta_3 = \theta_1 + \beta \qquad (3.121)$$

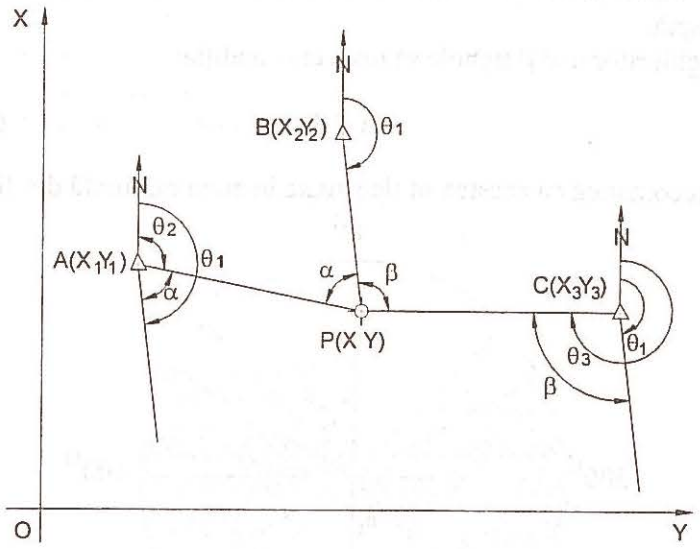


Figura 3.21
Caz particular al intersecției înapoi

Având aceste notații, sistemul ecuațiilor celor trei drepte (AP, BP si CP), prin analogie cu sistemul (3.95) este:

$$\begin{aligned} Y - Y_1 &= (X - X_1)\cdot tg\,\theta_2 = (X - X_1)\cdot tg(\theta_1 - \alpha) \\ Y - Y_2 &= (X - X_2)\cdot tg\,\theta_1 = (X - X_2)\cdot tg\,\theta_1 \\ Y - Y_3 &= (X - X_3)\cdot tg\,\theta_3 = (X - X_3)\cdot tg(\theta_1 + \beta) \end{aligned} \qquad (3.122)$$

se ştie din trigonometrie că:

$$\begin{aligned} tg(\theta_1 - \alpha) &= \frac{tg\theta_1 - tg\alpha}{1 + tg\theta_1 tg\alpha} \\ tg(\theta_1 - \beta) &= \frac{tg\theta_1 + tg\beta}{1 - tg\theta_1 tg\beta} \end{aligned} \qquad (3.123)$$

Corelăm relațiile (3.123) şi (3.122), substituim apoi necunoscuta Y din ecuația numărul doi a sistemului (3.122) în ecuația unu şi trei a aceluiaşi sistem, rezultând o funcție ce conține necunoscuta X.

$$\begin{aligned} &X(1 + tg^2\theta_1)\cdot tg\,\alpha = (Y_1 - Y_2) + (X_2 - X_1)\cdot tg\,\theta_1 + \\ &+(Y_1 - Y_2)\cdot tg\,\theta_1 tg\,\alpha + (X_1 + X_2 tg^2\theta_1)\cdot tg\,\alpha \end{aligned} \qquad (3.124)$$

respectiv

$$X(1+tg^2\theta_1)*tg\beta=(Y_2-Y_3)+(X_3-X_2)*tg\theta_1+ +(Y_3-Y_2)tg\theta_1 tg\beta+(X_3+X_2tg^2\theta_1)*tg\beta \quad (3.125)$$

împărțim ecuațiile (3.124) la (3.125)

$$\frac{X(1+tg^2\theta_1)tg\alpha}{X(1+tg^2\theta_1)tg\beta}= \frac{(Y_1-Y_2)+(X_2-X_1)tg\theta_1+(Y_1-Y_2)tg\theta_1 tg\alpha+(X_1+X_2tg^2\theta_1)tg\alpha}{(Y_2-Y_3)+(X_3-X_2)tg\theta_1+(Y_3-Y_2)tg\theta_1 tg\beta+(X_3+X_2tg^2\theta_1)tg\beta} \quad (3.126)$$

în proporția (3.136) se fac simplificări, se înmulțește numitorul cu ctgβ și numărătorul cu ctgα, se ține seama de faptul că:

$$tg\alpha*ctg\alpha=1 \text{ și } tg\beta*ctg\beta=1 \quad (3.127)$$

rezultă:

$$1=\frac{(Y_1-Y_2)ctg\alpha+(X_2-X_1)tg\theta_1 ctg\alpha+(Y_2-Y_1)tg\theta_1+X_2+X_1tg^2\theta_1}{(Y_1-Y_3)ctg\beta+(X_3+X)_1 tg\,\theta_1 ctg\beta+(Y_3-Y_1)tg\theta_1+X_3+X_1tg^2\theta_1} \quad (3.128)$$

se explicitează valoarea funcției trigonometrice $tg\theta_1$ obținându-se:

$$tg\,\theta_1=\frac{(Y_2-Y_1)ctg\alpha+(Y_2-Y_3)ctg\beta-X_1+X_3}{(X_2-X_1)ctg\alpha+(X_2-X_3)ctg\beta+Y_1-Y_3} \quad (3.129)$$

Rezultă necunoscuta θ_1

Cu relația (3.121) obținem celelalte orientări.

În continuare sunt urmărite aceleași etape ca la intersectia înapoi, cazul general.

3.3.3. Cazuri de nedeterminare la intersecția înapoi

1. Cazul când patrulaterul ABCP este inscriptibil

Din fig. 3.22 rezultă:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=400^G \quad (3.130)$$

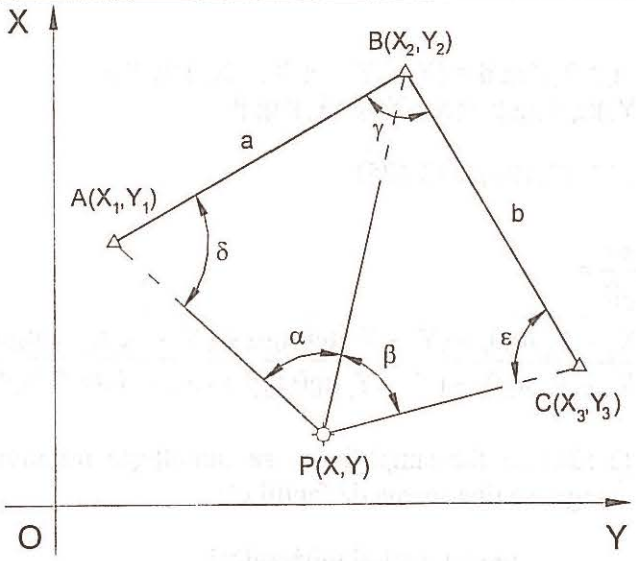


Figura 3.22
Condiția de patrulater inscriptibil

Din ΔABP şi ΔBPC aplicând teorema sinusurilor rezultă:

$$\frac{BP}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin\alpha} \tag{3.131}$$

$$\frac{BP}{\sin\varepsilon}=\frac{b}{\sin\beta} \tag{3.132}$$

împărțind cele două relații obținem:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} \tag{3.133}$$

care se mai poate scrie şi sub forma:

$$\frac{\sin\delta-\sin\varepsilon}{\sin\delta+\sin\varepsilon}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta} \tag{3.134}$$

sau

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta-\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta+\varepsilon}{2}}=\frac{1-\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1+\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}} \tag{3.135}$$

efectuăm calculele:

$$tg\frac{\delta-\varepsilon}{2}=tg\frac{\delta+\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1+\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}=tg\frac{\delta+\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-tg\varphi}{1+tg\varphi} \qquad (3.136)$$

unde

$$\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}=tg\varphi \qquad (3.137)$$

Într-un patrulater inscriptibil trebuie îndeplinite condițiile:

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=200^G\\ \delta+\varepsilon&=200^G\end{aligned} \qquad (3.138)$$

deci:

$$\sin\delta=\sin(200-\varepsilon)=\sin\varepsilon \qquad (3.139)$$

în relația (3.137) inversăm numărătorul cu numitorul și rezultă:

$$1=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}=\frac{1}{tg\varphi} \qquad (3.140)$$

din relația (3.140) avem:

$$tg\varphi=1 \qquad (3.141)$$

Înlocuim valorile (3.141), (3.140) și (3.138) în relația (3.137) și obținem:

$$tg\frac{\delta-\varepsilon}{2}=tg\frac{200}{2}\cdot\frac{1-1}{1+1}=\infty*0 \qquad (3.142)$$

acesta este un caz de nedeterminare cunoscut din analiza matematică.

Din cele arătate rezultă că dacă pe teren se măsoară în P două unghiuri α și β care însumate cu unghiul γ, calculat ca diferență dintre orientările laturilor BA și BC, totalizează 200^G, atunci patrulaterul ABCP este inscriptibil și problema determinării coordonatelor X și Y ale punctului P este nedeterminată, deci nu se pot determina coordonate pentru punctul P până când nu se schimbă poziția punctului din P în P' astfel ca:

$$\alpha'+\beta'+\gamma'\neq 200^G \qquad (3.143)$$

2. Cazul când unghiurile α şi β sunt prea mari

Dacă unul dintre cele două unghiuri măsurate în punctul nou P are o valoare apropiată de 200^G (între 180^G şi 210^G), ctgα sau ctgβ variază prin salturi mari şi bruşte pentru variaţii mici ale unghiurilor α şi β. Aceasta înseamnă că o foarte mică eroare (inevitabilă) la măsurarea unghiurilor se traduce printr-o mare diferenţă în valoarea cotangentei acelui unghi.

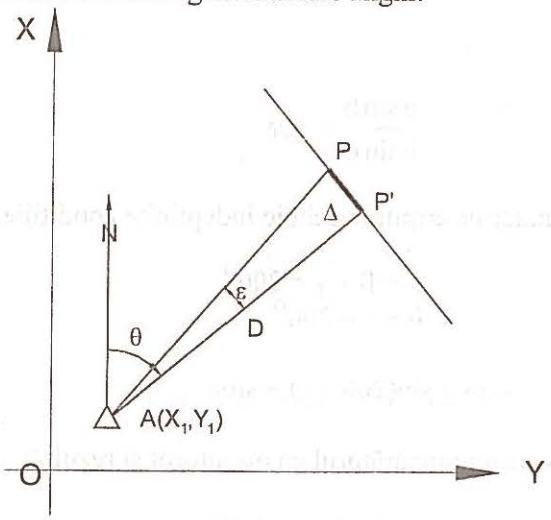


Figura 3.23
Eroarea de orientare ε şi ecartul liniar Δ

Se observă că imprecizia ε de la determinarea unghiurilor α sau β se transmite orientărilor θ şi se traduce printr-o imprecizie Δ în determinarea poziţiei planimetrice a punctului P care se măreşte artificial numai din cauza variaţiei ctg unui unghi de cca. 200^G.

$$\Delta = D\,tg\varepsilon$$

$$\Delta = D\frac{\varepsilon^{cc}}{\rho^{cc}} \qquad (3.144)$$

Formulele de mai sus arată că ecartul liniar Δ (eroarea în coordonate) a punctului nou P este funcţie de mărimea lui ε care este eroarea de orientare a direcţiei D (fig. 3.23).

În cazul acesta se va schimba direcţia de referinţă a orientărilor retro-intersecţiei şi se vor determina în punctul P unghiurile α şi β la care din cauză că unghiul este de mărime $\approx 200^g$ nu se va mai lua ca referinţă a orientărilor prima direcţie AP, ci direcţia din BP, de exemplu fig. (3.24).

În relația (3.136) în locul lui θ_1 se va trece θ_2, iar în locul valorilor α și β se vor considera valorile α' și β' (fig. 3.24) care vor trebui determinate cu ajutorul direcțiilor măsurate în punctul P.

Se va ține seama de acest lucru la calculul orientărilor pentru a se transforma intersecția înapoi în intersecție înainte.

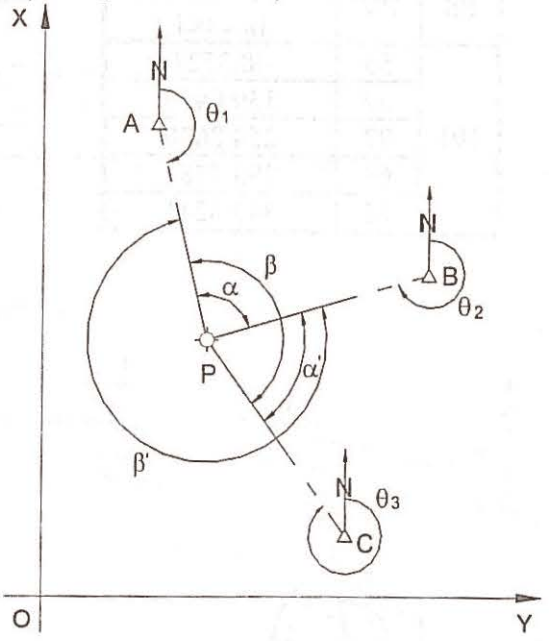


Figura 3.24
Schimbarea referinței orientărilor la intersecția înapoi

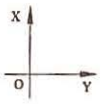
3.3.4. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului 101 prin intersecție înapoi. Procedeul Delambre.

1. Date inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 55, 59, 77,63,85
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 3-27

Pct	X [m]	Y [m]
55	10133.111	6959.121
59	9507.900	8704.780
77	7006.267	8873.495
63	7794.871	7807.489
85	7536.629	6177.881



2. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stația 101 centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabelul 3-28

PS	PV	Direcții măsurate [g c cc]
101	55	48.3523
	59	139.0429
	77	254.8690
	63	293.4287
	85	347.6241

3. Schița vizelor

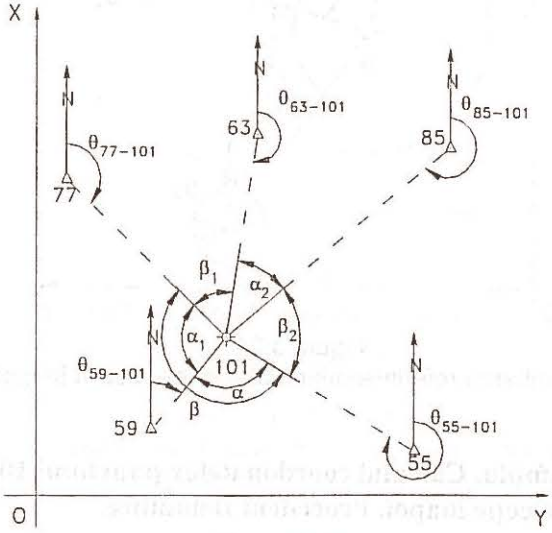


Figura 3.25
Schița vizelor în punctul 101;

4. Unghiurile orizontale calculate din direcții α_i și β_i

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= dir_{77} - dir_{59} = 254.8690 - 139.0429 = 115.8261 \\
\beta_1 &= dir_{63} - dir_{77} = 293.4287 - 254.8690 = 38.5597 \\
\alpha_2 &= dir_{85} - dir_{63} = 347.6241 - 293.4287 = 54.1954 \\
\beta_2 &= dir_{55} - dir_{85} = 48.3523 - 347.6241 = 100.7282 \\
\alpha &= dir_{59} - dir_{55} = 139.0429 - 48.3523 = 90.6906 \\
\beta &= dir_{77} - dir_{55} = 254.8690 - 48.3523 = 206.5167
\end{aligned} \qquad (3.145)$$

5. Etape de calcul:

a. Cazul I

a1. Calculul orientărilor $\theta_{77-101}, \theta_{85-101}$

$$\theta_{77-101} = \text{arctg}\frac{(Y_{77}-Y_{59})\text{ctg}\alpha_1 + (Y_{77}-Y_{63})\text{ctg}\beta_1 + X_{63} - X_{59}}{(X_{77}-X_{59})\text{ctg}\alpha_1 + (X_{77}-X_{63})\text{ctg}\beta_1 - Y_{63} + Y_{59}} = 367^{G}.9772$$
$$\theta_{85-101} = \text{arctg}\frac{(Y_{85}-Y_{63})\text{ctg}\alpha_2 + (Y_{85}-Y_{55})\text{ctg}\beta_2 + X_{55} - X_{63}}{(X_{85}-X_{63})\text{ctg}\alpha_2 + (X_{85}-X_{55})\text{ctg}\beta_2 - Y_{55} + Y_{63}} = 60^{G}.7378 \quad (3.146)$$

a2. Calculul orientărilor $\theta_{59-101}, \theta_{63-101}, \theta_{55-101}$

$$\theta_{59-101} = \theta_{77-101} - \alpha_1 = 367.9772 - 115.8261 = 252.1511$$
$$\theta_{63-101} = \theta_{77-101} + \beta_1 = 367.9772 + 38.5597 = 6.5369$$
$$\theta_{63-101} = \theta_{85-101} - \alpha_2 = 60.738 - 54.1954 = 6.5424$$
$$\theta_{55-101} = \theta_{85-101} + \beta_2 = 60.738 + 100.7282 = 161.4660$$
(3.147)
$$\theta_{63-101}^{med} = \frac{6.5369 + 6.5424}{2} = 6^{G}.5396$$

a3. Calculul coordonatelor punctului 101 prin intersecție înainte cu orientări

$$X_{101}^{1} = \frac{Y_{59} - Y_{63} + X_{63} * \text{tg}\theta_{63-101} - X_{59} * \text{tg}\theta_{59-101}}{\text{tg}\theta_{63-101} - \text{tg}\theta_{59-101}}$$
$$Y_{101}^{1} = Y_{59} + (X_{101} - X_{59}) * \text{tg}\theta_{59-101} \quad (3.148)$$
$$Y_{101}^{2} = Y_{63} + (X_{101} - X_{63}) * \text{tg}\theta_{63-101}$$

$$X_{101}^{2} = \frac{Y_{85} - Y_{55} + X_{55}\text{tg}\theta_{55-101} - X_{85}\text{tg}\theta_{85-101}}{\text{tg}\theta_{55-101} - \text{tg}\theta_{85-101}}$$
$$Y_{101}^{3} = Y_{85} + (X_{101} - X_{85})\text{tg}\theta_{85-101} \quad (3.149)$$
$$Y_{101}^{4} = Y_{55} + (X_{101} - X_{55})\text{tg}\theta_{55-101}$$

Calculul coordonatelor punctului 101

Tabel 3-29

Pct.	X [m]	tgθ	Y [m]	Orientarea [g c cc]
59	9507.900	1.069969	8704.780	252.1511
101	8762.515	–	7907.241 / 7907.241	–
63	7794.871	0.103087	7807.489	6.5396
85	7536.629	1.410471	6177.881	60.7378
101	8762.764	–	7907.309 / 7907.309	–
55	10133.111	- 0.691932	6959.121	161.4660

b. Cazul II

b1. Calculul orientării θ_{55-101}

$$\theta_{55-101}=\text{arctg}\frac{(Y_{59}-Y_{55})\text{ctg}\alpha+(Y_{59}-Y_{77})\text{ctg}\beta+X_{77}-X_{55}}{(X_{59}-X_{55})\text{ctg}\alpha+(X_{59}-X_{77})\text{ctg}\beta-Y_{55}+Y_{77}}=161^{G}.4672 \quad (3.150)$$

b2. Calculul orientărilor $\theta_{59-101}, \theta_{77-101}$

$$\begin{aligned}\theta_{59-101}&=\theta_{55-101}+\alpha=161.4672+90.6906=252^{G}.1578\\ \theta_{77-101}&=\theta_{55-101}+\beta=161.4672+206.5167=367^{G}.9839\end{aligned} \quad (3.151)$$

c. Calculul coordonatelor punctului 101 prin intersecție înainte cu orientări

$$\begin{aligned}X^{3}_{101}&=\frac{Y_{55}-Y_{59}+X_{59}\text{tg}\theta_{59-101}-X_{55}\text{tg}\theta_{55-101}}{\text{tg}\theta_{59-101}-\text{tg}\theta_{55-101}}\\ Y^{5}_{101}&=Y_{55}+(X_{101}-X_{55})\text{tg}\theta_{55-101}\\ Y^{6}_{101}&=Y_{59}+(X_{101}-X_{59})\text{tg}\theta_{59-101}\end{aligned} \quad (3.152)$$

$$\begin{aligned}X^{4}_{101}&\frac{Y_{59}-Y_{77}+X_{77}\text{tg}\theta_{77-101}-X_{59}\text{tg}\theta_{59-101}}{\text{tg}\theta_{77-101}-\text{tg}\theta_{59-101}}\\ Y^{7}_{101}&=Y_{59}+(X_{101}-X_{59})\text{tg}\theta_{59-101}\\ Y^{8}_{101}&=Y_{77}+(X_{101}-X_{77})\text{tg}\theta_{77-101}\end{aligned} \quad (3.153)$$

Calculul coordonatelor punctului 101

Tabel 3-30

Pct.	X [m]	Tgθ	Y [m]	Orientarea [g c cc]
55	10133.111	- 0.691904	6959.121	161.4672
101	8762.725		7907.296 / 7907.296	
59	9507.900	1.070196	8704.780	252.1578
59	9507.900	1.070196	8704.780	252.1578
101	8762.725		7907.296 / 7907.296	
77	7006.267	-0.550084	8873.495	367.9839

6. Calculul coordonatelor cele mai probabile ale pctului 101

$$X_{101} = \frac{X^1_{101} + X^2_{101} + X^3_{101} + X^4_{101}}{4} =$$

$$= \frac{8762.515 + 8762.764 + 8762.725 + 8762.725}{4} = 8762.682\text{m}$$

(3.154)

$$Y_{101} = \frac{Y^1_{101} + Y^2_{101} + Y^3_{101} + Y^4_{101} + Y^5_{101} + Y^6_{101} + Y^7_{101} + Y^8_{101}}{8} =$$

$$= \frac{7907.241 + 7907.241 + 7907.309 + 7907.309 + 4 * 7907.296}{8} = 7907.286\text{m}$$

$$X_{101}=8762.682\ m \qquad Y_{101}=7907.286\ m \qquad (3.155)$$

3.3.5. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înapoi. Soluția trigonometrică. Procedeul Kästner

1. Date inițiale

Punctele vechi de coordonate cunoscute A, B şi C (fig. 3.26) sunt marcate şi semnalizate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. Punctul P este marcat şi eventual semnalizat pe teren, nu are coordonate cunoscute, pentru el dorim să determinăm coordonatele X şi Y.

2. Măsurători

Sunt folosite instrumente de precizie şi metode adecvate triangulației pentru măsurarea direcțiilor din punctul P către punctele vechi A, B şi C (fig. 3.26). Cu ajutorul acestor direcții se determină unghiurile α şi β.

Dorim să determinăm, pe baza coordonatelor punctelor vechi vizate şi a

unghiurilor α şi β determinate, coordonatele rectangulare X şi Y ale punctului nou P.

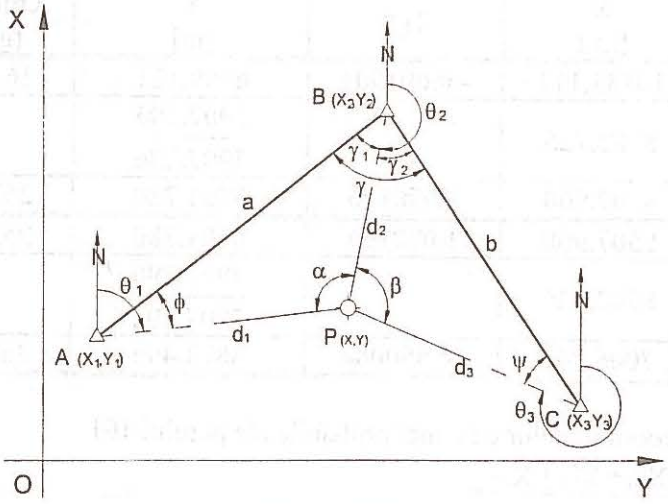


Figura 3.26
Procedeul Kästner

3. Etape de calcul:

a. Calculul mărimii lungimii laturilor şi a orientării laturilor BA şi BC din coordonate

$$
\begin{aligned}
a = D_{BA} &= \sqrt{(\Delta X_{AB})^2 + (\Delta Y_{AB})^2} = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} \\
\theta_{BA} &= \operatorname{arctg}\frac{(\Delta Y_{BA})}{(\Delta X_{BA})} = \operatorname{arctg}\frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} \\
b = D_{BC} &= \sqrt{(\Delta X_{BC})^2 + (\Delta Y_{BC})^2} = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2} \\
\theta_{BC} &= \operatorname{arctg}\frac{(\Delta Y_{BC})}{(\Delta X_{BC})} = \operatorname{arctg}\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2}
\end{aligned}
\qquad (3.156)
$$

b. Calculul unghiului γ

$$\gamma = \theta_{BA} - \theta_{BC} \qquad (3.157)$$

c. Determinarea unghiurilor φ şi ψ din condiția de sumă a unghiurilor într-un patrulater

$$
\begin{aligned}
(\alpha + \beta + \gamma) + (\varphi + \psi) &= 400^G \\
(\varphi + \psi) &= 400^G - (\alpha + \beta + \gamma)
\end{aligned}
\qquad (3.158)
$$

notăm:

notăm:

$$A = \frac{\varphi + \psi}{2} = 200 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \qquad (3.159)$$

A- este o valoare ce poate fi calculată cu ajutorul elementelor cunoscute din membrul drept al relației (3.159)

d. În triunghiurile BPA și BCP aplicăm teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{d_2}{\sin\varphi} \Rightarrow d_2 = \frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha} \qquad (3.160)$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{d_2}{\sin\psi} \Rightarrow d_2 = \frac{b\sin\beta}{\sin\psi} \qquad (3.161)$$

egalând cele două relații (3.160) și (3.161) obținem:

$$\frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{b\sin\psi}{\sin\beta}$$

sau (3.162)

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} = \frac{p_1}{p_2}$$

în care:

$$\begin{aligned} p_1 &= b\sin\alpha \\ p_2 &= a\sin\beta \end{aligned} \qquad (3.163)$$

relațiilor (3.161) și (3.162) aplicăm proprietatea raporturilor

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \qquad (3.164)$$

efectuăm transformarea unei sume și diferențe de funcții trigonometrice în produse și avem:

$$\frac{2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \qquad (3.165)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2} \tag{3.166}$$

în relațiile (3.166) membrul drept este calculabil, format din elemente cunoscute, putem calcula:

$$B=\operatorname{arctg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \tag{3.167}$$

Relațiile (3.159) și (3.167) formează un sistem de două ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases} A=\dfrac{\varphi+\psi}{2} \\ B=\dfrac{\varphi-\psi}{2} \end{cases} \tag{3.168}$$

a cărui sistem de soluții este

$$\begin{aligned} \varphi &= A+B \\ \psi &= A-B \end{aligned} \tag{3.169}$$

e. Calculul unghiurilor γ_1 și γ_2

în triunghiul BPA

$$\gamma_1=200-(\alpha+\varphi) \tag{3.170}$$

în triunghiul BCP

$$\gamma_2=200-(\beta+\psi) \tag{3.171}$$

pentru control avem

$$\gamma_1+\gamma_2=\gamma \tag{3.172}$$

f. Calculul distanțelor d_1, d_2 și d_3

în triungiul BPA aplicăm teorema sinusurilor

$$M_1=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{d_1}{\sin\gamma_1}=\frac{d_2}{\sin\varphi} \tag{3.173}$$

mărimea $M_1 = \frac{a}{\sin\alpha}$ este calculabilă, se numeşte modul şi se calculează, de regulă, cu patru zecimale, el fiind caracteristic numai pentru acest triunghi

$$\begin{aligned} d_1 &= M_1 * \sin\gamma_1 \\ d_2' &= M_1 * \sin\psi \end{aligned} \qquad (3.174)$$

în triunghiul BCP aplicăm teorema sinusurilor

$$M_2 = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{d_3}{\sin\gamma_2} = \frac{d_2''}{\sin\psi} \qquad (3.175)$$

$$\begin{aligned} d_3 &= M_2 * \sin\gamma_2 \\ d_2'' &= M_2 * \sin\psi \end{aligned} \qquad (3.176)$$

valorile d_2' şi d_2'' trebuie să respecte condiţia de toleranţă

$$|d_2' - d_2''| \le T_D \qquad (3.177)$$

astfel putem calcula valoarea cea mai probabilă a mărimii d_2

$$d_2 = \frac{d_2' + d_2''}{2} \qquad (3.178)$$

g. Calculul orientării laturilor AP, BP şi CP

$$\begin{aligned} \theta_{AP} &= \theta_{BA} \mp 200^G + \varphi \\ \theta_{CP} &= \theta_{BC} \mp 200^G - \psi \\ \theta_{BP}' &= \theta_{BA} - \gamma_1 \\ \theta_{BP}'' &= \theta_{BC} - \gamma_2 \end{aligned} \qquad (3.179)$$

condiţia de toleranţă este

$$|\theta_{BP}' - \theta_{BP}''| \le T_\theta \qquad (3.180)$$

valoarea cea mai probabilă pentru θ_{BP} se calculează ca medie aritmetică, ea poate fi calculată şi ca medie ponderată

$$\theta_{BP} = \frac{\theta_{BP}' + \theta_{BP}''}{2} \qquad (3.181)$$

h. Calculul coordonatelor punctului P prin metoda radierii

$$\begin{aligned} X' &= X_1 + d_1 * \cos\theta_{AP} \\ Y' &= Y_1 + d_1 * \sin\theta_{AP} \\ X'' &= X_2 + d_2 * \cos\theta_{BP} \\ Y'' &= Y_2 + d_2 * \sin\theta_{BP} \\ X''' &= X_3 + d_3 * \cos\theta_{CP} \\ Y''' &= Y_3 + d_3 * \sin\theta_{CP} \end{aligned} \qquad (3.182)$$

condiția de toleranță este:

$$\begin{aligned} |X_{max} - X_{min}| &\le T_X \\ |Y_{max} - Y_{min}| &\le T_Y \end{aligned} \qquad (3.183)$$

i. Calculul valorilor celor mai probabile pentru punctul P

$$\begin{aligned} X &= \frac{X' + X'' + X'''}{3} \\ Y &= \frac{Y' + Y'' + Y'''}{3} \end{aligned} \qquad (3.184)$$

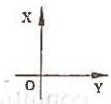
3.3.5.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului 309. Procedeul Kästner.

1. Date inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 73, 85, 63, 92
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 3-31

Pct.	X [m]	Y [m]
73	4587.205	8214.708
85	5351.210	6681.323
63	7001.153	6681.188
92	6485.919	8358.022



2. Măsurători

Direcţiile orizontale compensate în staţia 309 centrate, reduse şi reduse la planul de proiecţie

Tabelul 3-32

PS	PV	Direcţii măsurate [g c cc]
309	73	232.0812
	85	283.4239
	63	324.0091
	92	352.0992

3. Schiţa vizelor:

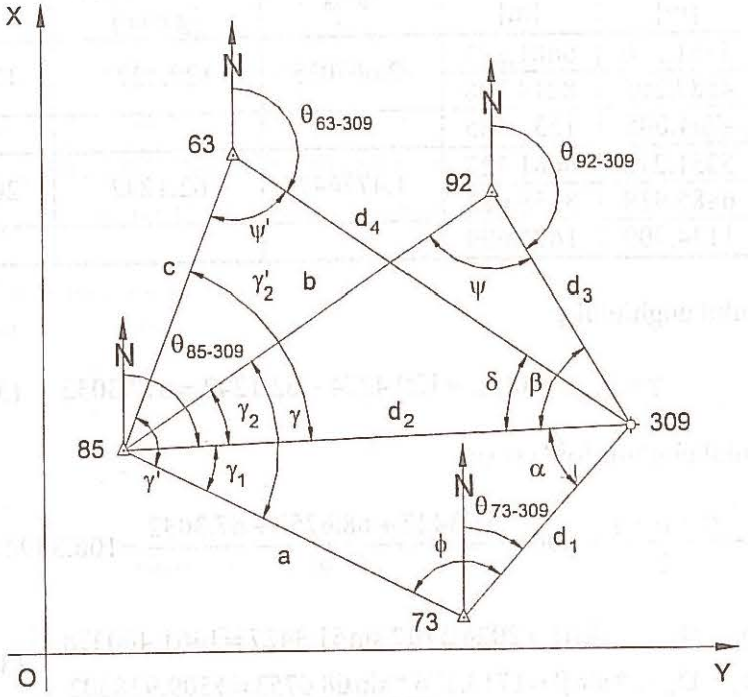


Figura 3.27
Procedeul Kästner

4. Calculul unghiurile orizontale α, β, δ

$$\alpha = dir_{85} - dir_{73} = 283.4239 - 232.0812 = 51^{G}.3427$$
$$\delta = dir_{63} - dir_{85} = 324.0051 - 283.4239 = 40^{G}.5852 \quad (3.185)$$
$$\beta = dir_{92} - dir_{85} = 352.0992 - 283.4239 = 68^{G}.6753$$

5. Etape de calcul:

a. Combinația 1, folosind unghiurile α și β și punctele 73, 85, 92

a1. Calculul orientărilor și distanței dintre punctele vechi:

$$\theta_{85i} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{85i}}{\Delta X_{85i}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_i - Y_{85}}{X_i - X_{85}} \qquad (3.186)$$

$$D_{85i} = \sqrt{(X_i - X_{85})^2 + (Y_i - Y_{85})^2} \qquad (3.187)$$

Calculul orientării și distanței între punctele vechi

Tabel 3-33

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanța D_{AB} [m]
85	5351.210	6681.323	-2.007035	129.4274	1713.176
73	4587.205	8214.708			
Δ	-764.005	1533.385			
85	5351.210	6681.323	1.477647	62.1242	2024.570
92	6485.919	8358.022			
Δ	1134.709	1676.699			

a2. Calculul unghiului γ:

$$\gamma = \theta_{85-73} - \theta_{85-92} = 129.4274 - 62.1242 = 67^{G}.3032 \qquad (3.188)$$

a3. Calculul unghiurilor φ și ψ:

$$A = 200 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 200 - \frac{51.3427 + 68.6753 + 67.3032}{2} = 106.3394 \qquad (3.189)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= D_{85-92} * \sin\alpha = 2024.570 * \sin 51.3427 = 1461.460328 \\ p_2 &= D_{85-73} * \sin\beta = 1713.176 * \sin 68.6753 = 1509.938002 \end{aligned} \qquad (3.190)$$

$$\begin{aligned} tg\frac{\varphi - \psi}{2} &= \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} * tg\frac{\varphi + \psi}{2} = \\ &= \frac{1461.460328 - 1509.938002}{1461.460328 + 1509.938002} * tg106.3394 = 0.163296 \end{aligned} \qquad (3.191)$$

$$B = \text{arctg}\frac{\varphi - \psi}{2} = \text{arctg}0.163296 = 10.3048 \qquad (3.192)$$

$$\varphi = A + B = 106.3394 + 10.3048 = 116^{G}.6442 \qquad (3.193)$$

$$\psi = A - B = 106.3394 - 10.3048 = 96^{G}.0346$$

a4. Calculul unghiurilor γ_1 şi γ_2:

$$\gamma_1 = 200 - (\alpha + \varphi) = 200 - (51.3427 + 116.6442) = 32^{G}.0132 \qquad (3.194)$$

$$\gamma_2 = 200 - (\beta + \psi) = 200 - (68.6753 + 96.0346) = 35^{G}.2901$$

a5. Calculul orientărilor θ_{73-309} , θ_{85-309} şi θ_{92-309}:

$$\theta_{73-309} = \theta_{73-85} + \varphi - 400 = 329.4274 + 116.6442 - 400 = 46^{G}.0716$$

$$\theta_{85-309} = \theta_{85-73} - \gamma_1 = 129.4274 - 32.0131 = 97^{G}.4143 \qquad (3.195)$$

$$\theta_{85-309} = \theta_{85-92} + \gamma_2 = 62.1242 + 35.2901 = 97^{G}.4143$$

$$\theta_{92-309} = \theta_{92-85} - \psi = 262.1242 - 96.0346 = 166^{G}.0896$$

a6. Calculul distanţelor d_1, d_2, d_3:
în triunghiul 73-85-309:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{d_1}{\sin\gamma_1} = \frac{d_2^1}{\sin\varphi} \qquad (3.196)$$

$$M_1 = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1713.176}{\sin 51.3427} = 2373.2739 \qquad (3.197)$$

$$d_1 = M_1 * \sin\gamma_1 = 2373.2734 * \sin 32.0132 = 1143.762\,\text{m} \qquad (3.198)$$

$$d_2^1 = M_1 * \sin\varphi = 2373.2734 * \sin 116.6441 = 2292.624\,\text{m}$$

în triunghiul 85-92-309:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{d_2^2}{\sin\psi} = \frac{d_3}{\sin\gamma_2} \qquad (3.199)$$

$$M_2 = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{2024.570}{\sin 68.6753} = 2297.0782 \qquad (3.200)$$

$$d_2^2 = M_2 * \sin\psi = 2297.0782 * \sin 96.0347 = 2292.623\,\text{m}$$
$$d_3 = M_2 * \sin\gamma_2 = 2297.0782 * \sin 35.2900 = 1209.132\,\text{m} \quad (3.201)$$

a7. Calculul coordonatelor punctului 309 prin metoda radierii:

$$X_{309}^1 = X_{73} + d_1 * \cos\theta_{73-309} = 4587.205 + 1143.762 * \cos 46.0716 = 5444.303\,\text{m}$$
$$Y_{309}^1 = Y_{73} + d_1 * \sin\theta_{73-309} = 8214.708 + 1143.762 * \sin 46.0716 = 8972.056\,\text{m}$$
$$X_{309}^2 = X_{85} + d_2 * \cos\theta_{85-309} = 5351.210 + 2292.624 * \cos 97.4143 = 5444.303\,\text{m}$$
$$Y_{309}^2 = Y_{85} + d_2 * \sin\theta_{85-309} = 6681.323 + 2292.624 * \sin 97.4143 = 8972.056\,\text{m}$$
$$X_{309}^3 = X_{92} + d_3 * \cos\theta_{92-309} = 6485.919 + 1209.132 * \cos 166.0896 = 5444.303\,\text{m}$$
$$Y_{309}^3 = Y_{92} + d_3 * \sin\theta_{92-309} = 8358.022 + 1209.132 * \sin 166.0896 = 8972.056\,\text{m} \quad (3.202)$$

b. Combinația 2, folosind unghiurile α și δ și punctele 73, 85, 63
b1. calculul orientărilor și distanței dintre punctele vechi:

$$\theta_{85i} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{85i}}{\Delta X_{85i}} = \text{arctg}\frac{Y_i - Y_{85}}{X_i - X_{85}} \quad (3.203)$$

$$D_{85i} = \sqrt{(X_i - X_{85})^2 + (Y_i - Y_{85})^2} \quad (3.204)$$

Calculul orientării și distanței între punctele vechi

Tabel 3-34

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanța D_{AB} [m]
85	5351.210	6681.323	-2.007035	129.4274	1713.176
73	4587.205	8214.708			
Δ	-764.005	1533.385			
85	5351.210	6681.323	-0.000082	399.9948	1649.943
63	7001.153	6681.188			
Δ	1649.943	-0.135			

b2. Calculul unghiului γ:

$$\gamma' = \theta_{85-73} - \theta_{85-63} = 129.4274 - 399.9948 + 400 = 129^g.4326 \quad (3.205)$$

b3. Calculul unghiurilor φ şi ψ:

$$A = 200 - \frac{\alpha + \delta + \gamma'}{2} = 200 - \frac{51.3427 + 40.5852 + 129.4326}{2} = 89^{G}.3197 \quad (3.206)$$

$$p_1 = D_{85-63} * \sin\alpha = 1649.943 * \sin 51.3427 = 1191.031251$$
$$p_2 = D_{85-73} * \sin\delta = 1713.176 * \sin 40.5852 = 1019.677493 \quad (3.207)$$

$$tg\frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} * tg\frac{\varphi + \psi'}{2} =$$
$$= \frac{1191.031251 - 1019.677493}{1191.031251 + 1019.677493} * tg89.3197 = 0.457677 \quad (3.208)$$

$$B = arctg\frac{\varphi - \psi}{2} = arctg0.458014 = 27.3250 \quad (3.209)$$

$$\varphi = A + B = 89.3197 + 27.3250 = 116^{G}.6447$$
$$\psi' = A - B = 89.3197 - 27.3250 = 61^{G}.9948 \quad (3.210)$$

b4. Calculul unghiurilor γ_1 şi γ'_2:

$$\gamma_1 = 200 - (\alpha + \varphi) = 200 - (51.3427 + 116.6447) = 32^{G}.0126$$
$$\gamma'_2 = 200 - (\delta + \psi) = 200 - (40.5852 + 61.9948) = 97^{G}.4200 \quad (3.211)$$

b5. Calculul orientărilor θ_{73-309} , θ_{85-309} şi θ_{63-309}:

$$\theta_{73-309} = \theta_{73-85} + \varphi - 400 = 329.4274 + 116.6447 - 400 = 46^{G}.0721$$
$$\theta_{85-309} = \theta_{85-73} - \gamma_1 = 129.4274 - 32.0126 = 97^{G}.4148$$
$$\theta_{85-309} = \theta_{85-63} + \gamma'_2 = 399.9948 + 97.4200 = 97^{G}.4148 \quad (3.212)$$
$$\theta_{63-309} = \theta_{63-85} - \psi' = 199.9948 - 61.9948 = 138^{G}.0000$$

b6. Calculul distanţelor d_1, d_2, d_3:
în triunghiul 73-85-309:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{d_1}{\sin\gamma_1} = \frac{d'_2}{\sin\varphi} \quad (3.213)$$

$$M_3 = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1713.176}{\sin 51.3427} = 2373.2739 \qquad (3.214)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= M_3 * \sin\gamma_1 = 2373.2739 * \sin 32.0126 = 1143.744\,m \\ d_2^3 &= M_3 * \sin\varphi = 2373.2739 * \sin 116.6447 = 2292.618\,m \end{aligned} \qquad (3.215)$$

în triunghiul 85-63-309:

$$\frac{c}{\sin\delta} = \frac{d_2^4}{\sin\psi'} = \frac{d_4}{\sin\gamma_2'} \qquad (3.216)$$

$$M_4 = \frac{c}{\sin\delta} = \frac{1649.943}{\sin 40.5852} = 2772.0954 \qquad (3.217)$$

$$\begin{aligned} d_2^4 &= M_4 * \sin\psi' = 2772.0954 * \sin 61.9948 = 2292.618\,m \\ d_4 &= M_4 * \sin\gamma_2' = 2772.0954 * \sin 97.4200 = 2769.819\,m \end{aligned} \qquad (3.218)$$

b7. calculul coordonatelor punctului 309 prin metoda radierii

$$\begin{aligned} X_{309}^4 &= X_{73} + d_1 * \cos\theta_{73-309} = 4587.205 + 1143.744 * \cos 46.0921 = 5444.282\,m \\ Y_{309}^4 &= Y_{73} + d_1 * \sin\theta_{73-309} = 8214.708 + 1143.744 * \sin 46.0921 = 8972.051\,m \\ X_{309}^5 &= X_{85} + d_2 * \cos\theta_{85-309} = 5351.210 + 2292.618 * \cos 97.4148 = 5444.282\,m \\ Y_{309}^5 &= Y_{85} + d_2 * \sin\theta_{85-309} = 6681.323 + 2292.618 * \sin 97.4148 = 8972.051\,m \\ X_{309}^6 &= X_{63} + d_4 * \cos\theta_{63-309} = 7001.153 + 2769.819 * \cos 138.0000 = 5444.282\,m \\ Y_{309}^6 &= Y_{63} + d_4 * \sin\theta_{63-309} = 6681.188 + 2769.819 * \sin 138.0000 = 8972.051\,m \end{aligned} \qquad (3.219)$$

7. Calculul coordonatelor probabile ale punctului 309:

$$\begin{aligned} X_{309} &= \frac{X_{309}^1 + X_{309}^2 + X_{309}^3 + X_{309}^4 + X_{309}^5 + X_{309}^6}{6} = \frac{3*5444.303 + 3*5444.282}{6} = 5444.293\,m \\ Y_{309} &= \frac{Y_{309}^1 + Y_{309}^2 + Y_{309}^3 + Y_{309}^4 + Y_{309}^5 + Y_{309}^6}{6} = \frac{3*8972.056 + 3*8972.051}{2} = 8972.054\,m \end{aligned} \qquad (3.220)$$

$$X_{309} = 5444.293\ m \qquad Y_{309} = 8972.054\ m \qquad (3.221)$$

3.3.6. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înapoi. Procedeul Collins.

Printre metodele de rezolvare a retrointersecțiilor este și aceea datorată lui Collins (1671) cunoscută sub numele de "Metoda punctului ajutător".

Această metodă se adaptează procedeului analitic.

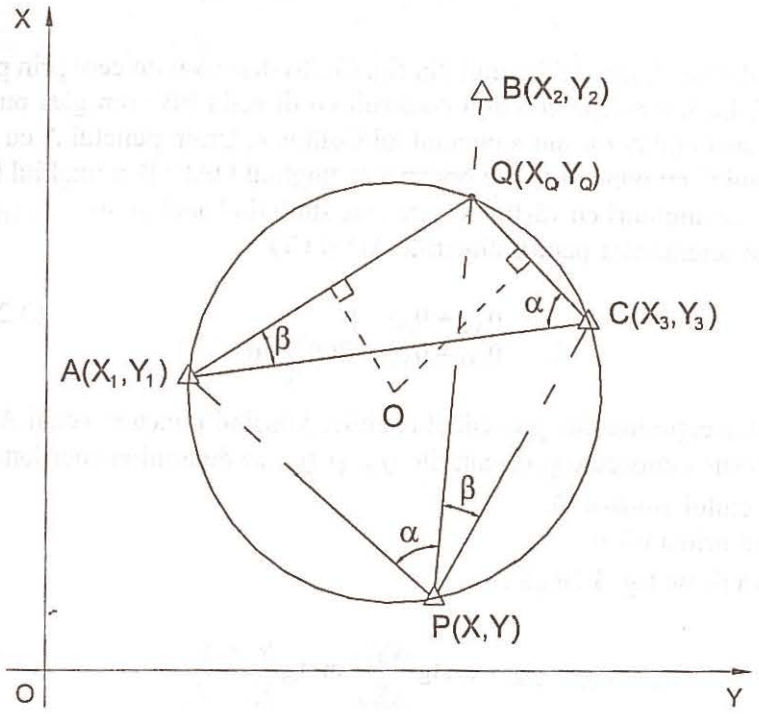


Figura 3.28
Procedeul Collins

1. Date inițiale

Punctele vechi de coordonate cunoscute A, B și C (fig. 3.28) sunt marcate și semnalizate, au fost recunoscute și identificate pe teren. Punctul P este marcat și eventual semnalizat pe teren, nu are coordonate cunoscute, pentru el dorim să determinăm coordonatele X și Y.

2. Măsurători

Sunt folosite instrumente de precizie și metode adecvate triangulației pentru măsurarea direcțiilor din punctul P către punctele vechi de coordonate cunoscute A, B și C (fig. 3.28).

Cu ajutorul acestor direcții se determină unghiurile α și β.

Dorim să determinăm, pe baza coordonatelor punctelor vechi vizate și unghiurilor α și β determinate, coordonatele rectangulare X și Y ale punctul nou P.

3. Etape de calcul

a. Determinarea orientării laturi AC din coordonatele punctelor vechi

$$\theta_{AC} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{AC}}{\Delta X_{AC}} = \text{arctg}\frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1} \qquad (3.222)$$

b. Pentru demonstrație pe desenul din fig. (3.28) desenăm un cerc prin puncte A, B și C. La intersecția cercului construit cu direcția PB vom găsi punctul numit « punct ajutător » sau « punctul lui Collins ». Unim punctul A cu punct Q și punctul C cu punctul Q. Se observă că unghiul QAC=β și unghiul QCA= sunt egale ca unghiuri cu vârful pe cerc care subîntind același arc.

c. Calculul orientărilor pentru direcțiile AQ și CQ

$$\theta_{AQ} = \theta_{AC} - \beta \qquad (3.223)$$
$$\theta_{CQ} = \theta_{AC} \mp 200^G + \alpha$$

4. Prin intersecție înainte, procedeul analitic, folosind punctele vechi A, B și de coordonate cunoscute și orientările θ_{AQ} și θ_{CQ} se determină coordonatele Y ale punctului ajutător Q.

5. Calculul orientării θ_{PB}

Se observă de pe fig. 3.28 că :

$$\theta_{BP} = \theta_{PQ} = \theta_{QB} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{QB}}{\Delta X_{QB}} \text{arctg}\frac{Y_2 - Y_Q}{X_2 - X_Q} \qquad (3.224)$$

6. Calculul orientărilor θ_{AP} și θ_{CP}

$$\theta_{AP} = \theta_{PB} - \alpha \mp 200^G \qquad (3.225)$$
$$\theta_{CP} = \theta_{BP} + \beta \mp 200^G$$

7. Determinarea coordonatelor punctului nou P se face prin intersecție înain procedeul analitic, folosind punctele vechi de coordonate cunoscute A și C orientările θ_{AP} și θ_{CP}

8. Controlul acestei metode constă în calculul suprafeței triungiului BQP c trebuie să tindă spre zero

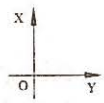
$$S_{\Delta BQP} = 0 \qquad (3.226)$$

3.3.6.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului 411. Procedeul Collins.

1. Date inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 56, 63, 85
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 3-35



Pct.	X [m]	Y [m]
56	5423.022	4554.001
63	7001.153	6681.188
85	5351.210	6681.323

2. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stația 411 centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabelul 3-36

PS	PV	Direcții măsurate [g c cc]
411	56	162.6093
	63	320.7528
	85	15.8983

3. Schița vizelor:

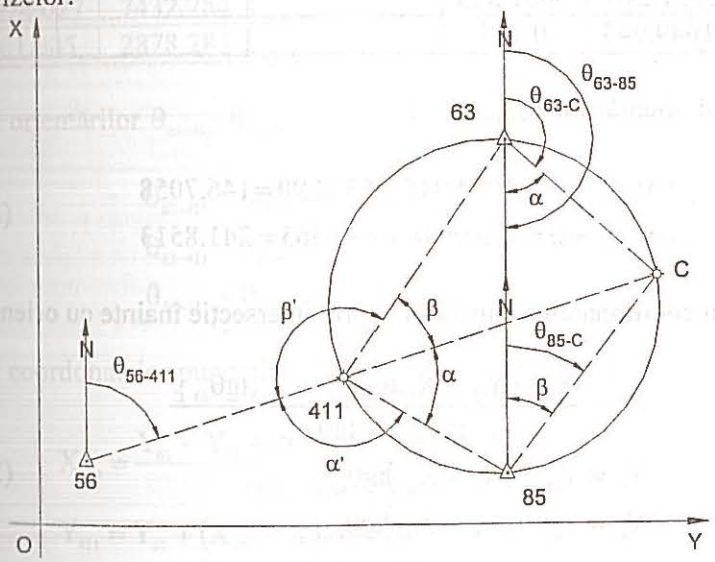


Figura 3.29
Procedeul Collins

4. Unghiurile orizontale α, β, α' şi β':

$$\alpha' = dir_{56} - dir_{85} = 146.7110$$
$$\beta' = dir_{63} - dir_{56} = 158.1435 \quad (3.227)$$

$$\alpha = 200 - \alpha' = 53.2890$$
$$\beta = 200 - \beta' = 41.8565 \quad (3.228)$$

5.Etape de calcul:

a. Calculul orientărilor şi distanţei dintre punctele vechi:

$$\theta_{63-85} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{63-85}}{\Delta X_{63-85}} = \text{arctg}\frac{Y_{85} - Y_{63}}{X_{85} - X_{63}} \quad (3.229)$$

$$D_{63-85} = \sqrt{(X_{85} - X_{65})^2 + (Y_{85} - Y_{63})^2} \quad (3.230)$$

Calculul orientării şi distanţei între punctele vechi Tabel 3-37

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanţa D_{AB} [m]
63	7001.153	6681.188	-0.000082	199.9948	1649.943
85	5351.210	6681.323			
Δ	-1649.943	0.135			

b. Calculul orientărilor $\theta_{63-C}, \theta_{85-C}$:

$$\theta_{63-C} = \theta_{63-85} - \alpha = 199.9948 - 53.2890 = 146.7058$$
$$\theta_{85-C} = \theta_{63-85} + \beta = 199.9948 + 41.8565 = 241.8513 \quad (3.231)$$

c. Calculul coordonatelor punctului C prin intersecţie înainte cu orientări:

$$X_C = \frac{Y_{63} - Y_{85} + X_{85}tg\theta_{85-C} - X_{63}tg\theta_{63-C}}{tg\theta_{85-C} - tg\theta_{63-C}}$$
$$Y_C = Y_{63} + (X_c - X_{63})tg\theta_{63-C} \quad (3.231a)$$
$$Y_C = Y_{85} + (X_C - X_{85})tg\theta_{85-C}$$

Calculul coordonatelor punctului C

Tabel 3-38

Pct.	X [m]	tgθ	Y [m]	Orientarea [g c cc]
63	7001.153	-1.109241	6681.188	146.7058
C	6324.027		7432.284 / 7432.284	
85	5351.210	0.771945	6681.323	241.8513

d. Calculul orientărilor θ_{56-C} și distanței D_{56-C}

$$\theta_{56-C} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{56-C}}{\Delta X_{56-C}} = \text{arctg}\frac{Y_C - Y_{56}}{X_C - X_{56}} \qquad (3.231b)$$

$$D_{56-C} = \sqrt{(X_C - X_{56})^2 + (Y_C - Y_{56})^2} \qquad (3.231c)$$

Calculul orientării și distanței între punctele 56 și C

Tabel 3-39

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanța D_{AB} [m]
56	5423.022	4554.001	3.194525	80.6867	3016.011
C	6324.027	7432.284			
Δ	901.005	2878.283			

e. Calculul orientărilor θ_{63-411}, θ_{85-411}

$$\begin{aligned}\theta_{63-411} &= \theta_{56-C} - \beta + 200 = 238^G.8302\\ \theta_{85-411} &= \theta_{56-C} + \alpha + 200 = 333^G.9757\\ \theta_{56-411} &= \theta_{56-C} = 80^G.6867\end{aligned} \qquad (3.231d)$$

f. Calculul coordonatelor punctului 411 prin intersecție înainte cu orientări:

$$\begin{aligned}X_{411} &= \frac{Y_{63} - Y_{85} + X_{85}tg\theta_{85-411} - X_{63}tg\theta_{63-411}}{tg\theta_{85-411} - tg\theta_{63-411}}\\ Y_{411} &= Y_{63} + (X_{411} - X_{63})tg\theta_{63-411}\\ Y_{411} &= Y_{85} + (X_{411} - X_{85})tg\theta_{85-411}\end{aligned} \qquad (3.231e)$$

$$X_{411} = \frac{Y_{63} - Y_{56} + X_{56} * tg\theta_{56-411} - X_{63} * tg\theta_{63-411}}{tg\theta_{56-411} - tg\theta_{63-411}}$$
$$Y_{411} = Y_{63} + (X_{411} - X_{63}) * tg\theta_{63-411} \qquad (3.231f)$$
$$Y_{411} = Y_{56} + (X_{411} - X_{56}) * tg\theta_{56-411}$$

$$X_{411} = \frac{Y_{56} - Y_{85} + X_{85} tg\theta_{85-411} - X_{56} tg\theta_{56-411}}{tg\theta_{85-411} - tg\theta_{56-411}}$$
$$Y_{411} = Y_{56} + (X_{411} - X_{56}) tg\theta_{56-411} \qquad (3.232)$$
$$Y_{411} = Y_{85} + (X_{411} - X_{85}) tg\theta_{85-411}$$

Calculul coordonatelor punctului 411 *Tabel 3-40*

Pct.	X [m]	tgθ	Y [m]	Orientarea [g c cc]
63	7001.153	0.698834	6681.188	238.8302
411	5833.463		5865.166 / 5865.166	
85	5351.210	-1.692382	6681.323	333.9757
63	7001.153	0.698834	6681.188	238.8302
411	5833.463		5865.166 / 5865.166	
56	5423.022	3.194526	4554.001	80.6867
56	5423.022	3.194526	4554.001	80.6867
411	5833.463		5865.166 / 5865.166	
85	5351.210	-1.692382	6681.323	333.9757

g. Calculul coordonatelor cele mai probabile ale punctului 411:

$$X_{411} = \frac{X^1_{411} + X^2_{411} + X^3_{411}}{3} = \frac{5833.463 + 5833.463 + 5833.463}{3} = 5833.463\,\text{m}$$
$$Y_{411} = \frac{Y^1_{411} + Y^2_{411} + Y^3_{411} + Y^4_{411} + Y^5_{411} + Y^6_{411}}{6} = \qquad (3.233)$$
$$= \frac{2*5865.166 + 2*5865.166 + 2*5865.166}{6} = 5865.166\,\text{m}$$

$$X_{411} = 5833.463\ m \qquad Y_{411} = 5865.166\ m \qquad (3.234)$$

h. Controlul calculelor:

$$S_{\Delta 56-411-C} = 0 \qquad (3.234a)$$

3.3.7. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înapoi. Procedeul Hansen

1. Date inițiale

Punctele vechi de coordonate cunoscute A, B și C (fig. 3.30) sunt marcate și semnalizate, au fost recunoscute și identificate pe teren. Punctul P este marcat și eventual semnalizat pe teren, nu are coordonate cunoscute, pentru el dorim să determinăm coordonatele X și Y. Există vizibilitate din punctul nou P către punctele vechi A și B.

Pentru determinarea coordonatelor punctului nou P este necesar să marcăm și să semnalizăm pe teren un punct ajutător Q. Trebuie să fie asigurate vizibilitățile indicate cu săgeți pe fig. (3.30). De asemenea se recomandă ca :

$$\frac{D_{PQ}}{D_{AB}} \geq \frac{1}{3} \qquad (3.235)$$

2. Măsurători

Sunt folosite instrumente de precizie și metode adecvate triangulației pentru măsurarea direcțiilor din punctul nou P și din punctul ajutător Q către celelalte puncte vechi A, B și C (fig. 3.30).

Cu ajutorul direcțiilor măsurate determinăm unghiurile α, β, α_1 și β_1.

Dorim să determinăm, pe baza coordonatelor punctelor vechi vizate și a unghiurilor α, β, α_1 și β_1 determinate, coordonatele rectangulare X și Y pentru punctul nou P.

3. Etape de calcul:

Pentru a determina coordonatele punctului nou P sunt de parcurs următoarele etape de calcul

a. Calculul unghiurilor γ și δ

în triunghiul APB avem :

$$\gamma + \delta + (\beta - \alpha) = 200^G \qquad (3.236)$$

de unde :

$$A = \frac{\gamma + \delta}{2} = 100^G - \frac{\beta - \alpha}{2} \qquad (3.237)$$

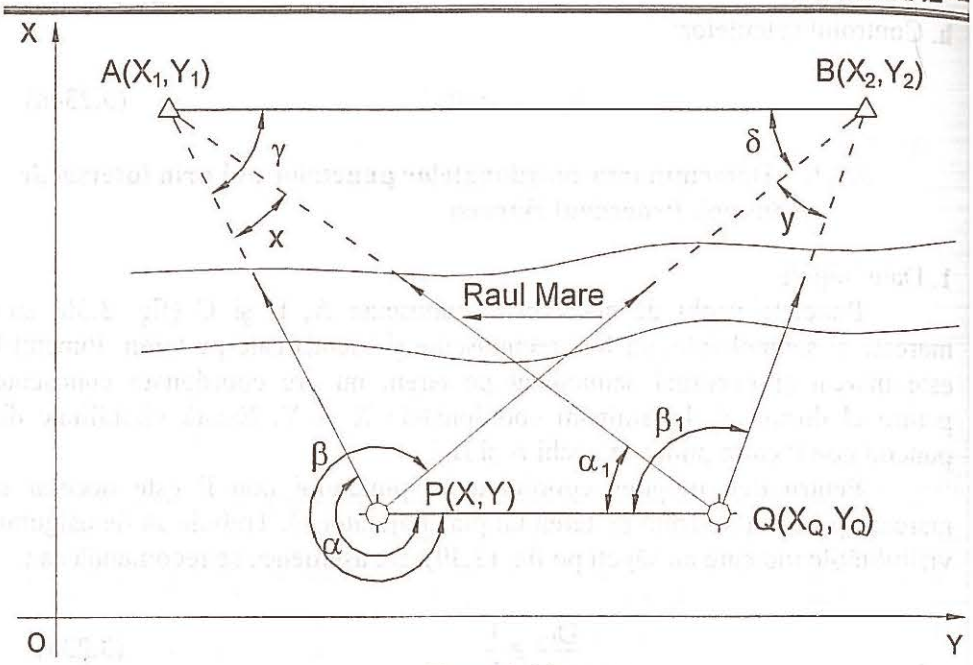


Figura 3.30
Procedeul Hansen

În relațiile (3.237) membrul drept este calculabil, deci A are o mărime cunoscută

Considerăm triunghiul ABP în care scriem teorema sinusurilor

$$\frac{PB}{\sin\gamma}=\frac{PA}{\sin\delta} \tag{3.238}$$

sau

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}=\frac{PB}{PA} \tag{3.239}$$

Aplicăm succesiv teorema sinusurilor în triunghiurile PAQ şi PBQ în triunghiul PAQ

$$\frac{PA}{\sin\alpha_1}=\frac{PQ}{\sin x} \tag{3.240}$$

$$x = 200^G - \alpha_1 - (400^G - \alpha) = 200^G - (\alpha_1 - \alpha) \tag{3.241}$$

$$\sin x = \sin(200^G - (\alpha_1 - \alpha)) = \sin(\alpha_1 - \alpha) \tag{3.242}$$

înlocuim relațiile (3.242) în relațiile (3.240) și obținem :

$$\frac{PA}{\sin\alpha_1} = \frac{PQ}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} \tag{3.243}$$

de unde :

$$PA = \frac{PQ * \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} \tag{3.244}$$

în triunghiul PBQ:

$$\frac{PB}{\sin\beta_1} = \frac{PQ}{\sin y} \tag{3.245}$$

$$y = 200^G - \beta_1 - (400^G - \beta) = 200^G - (\beta_1 - \beta) \tag{3.246}$$

$$\sin y = \sin(200^G - (\beta_1 - \beta)) = \sin(\beta_1 - \beta) \tag{3.247}$$

înlocuim relațiile (3.247) în relațiile (3.245) și obținem :

$$\frac{PB}{\sin\beta_1} = \frac{PQ}{\sin(\beta_1 - \beta)} \tag{3.248}$$

de unde :

$$PB = \frac{PQ\sin\beta_1}{\sin(\beta_1 - \beta)} \tag{3.249}$$

înlocuim relațiile (3.244) și relațiile (3.249) în relațiile (3.239) și obținem :

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{\dfrac{PQ\sin\beta_1}{\sin(\beta_1 - \beta)}}{\dfrac{PQ}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}} = \frac{\sin\beta_1 * \sin(\alpha_1 - \alpha)}{\sin(\beta_1 - \beta) * \sin\alpha_1} \tag{3.250}$$

ultimul membru al proporției (3.250) este format numai din funcții de valori cunoscute, facem notația :

$$tg\mu = \frac{\sin\beta_1 * \sin(\alpha_1 - \alpha)}{\sin\alpha_1 * \sin(\beta_1 - \beta)} \tag{3.251}$$

egalăm relația (3.250) cu relația (3.251)

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}=\frac{tg\mu}{1} \tag{3.252}$$

aplicăm proprietatea proporțiilor relației (3.252)

$$\frac{\sin\gamma-\sin\delta}{\sin\gamma+\sin\delta}=\frac{tg\mu-1}{tg\mu+1} \tag{3.253}$$

se știe că:

$$tg50^{G}=1 \tag{3.254}$$

$$\begin{aligned}\sin\gamma-\sin\delta&=2\sin\frac{\gamma-\delta}{2}*\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\\ \sin\gamma+\sin\delta&=2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}*\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\end{aligned} \tag{3.255}$$

înlocuim relațiile (3.255) în relațiile (3.253)

$$\frac{2\sin\frac{\gamma-\delta}{2}*\cos\frac{\gamma+\delta}{2}}{2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}*\cos\frac{\gamma-\delta}{2}}=\frac{tg\mu-tg50^{g}}{tg\mu+tg50^{g}} \tag{3.256}$$

dar:

$$\frac{tg\mu-tg50^{G}}{tg\mu+tg50^{G}}=tg(\mu-50^{G}) \tag{3.257}$$

din relațiile (3.256) și (3.257) rezultă :

$$tg\frac{\gamma-\delta}{2}=tg(\mu-50^{G})\cdot tg\frac{\gamma+\delta}{2} \tag{3.258}$$

în relațiile (3.258) membrul drept este calculabil, fiind format din funcții de elemente cunoscute

$$B=\operatorname{arctg}\frac{\gamma-\delta}{2}=\operatorname{arctg}(tg(\mu-50^{G})*tg\frac{\gamma+\delta}{2}) \tag{3.259}$$

Relațiile (3.237) și (3.259) formează un sistem de două ecuații cu două necunoscute:

$$A = \frac{\gamma + \delta}{2}$$
$$B = \frac{\gamma - \delta}{2} \qquad (3.260)$$

cu sistemul de soluții:

$$\gamma = A + B$$
$$\delta = A - B \qquad (3.261)$$

b. Calculul orientării dintre punctele vechi A și B:

$$\theta_{AB} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB}} = \text{arctg}\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \qquad (3.262)$$

c. Calculul orientărilor spre punctele noi:

$$\theta_{AP} = \theta_{AB} + \gamma$$
$$\theta_{AQ} = \theta_{AB} + (\gamma + x) = \theta_{AB} + (200 - (\alpha_1 - \alpha))$$
$$\theta_{BP} = \theta_{AB} \mp 200 - \delta \qquad (3.263)$$
$$\theta_{BQ} = \theta_{AB} \mp 200 - \delta - y = \theta_{AB} \mp 200 - \delta - (200 - (\beta_1 - \beta))$$

d. Calculul laturilor în triunghiurile ABP și ABQ se face aplicând teorema sinusurilor în aceste triunghiuri.

e. Determinarea coordonatelor punctelor noi P și Q se poate face:

e1. analitic - folosind relațiile de intersecție înainte pentru punctele P și Q, din punctele vechi A și B;

e2. trigonometric - folosind distanțele calculate la punctul 4 și orientările determinate la punctul 3, fiecare punct nou (P și Q) fiind determinat prin dublă radiere.

f. Controlul, pentru ambele procedee constă în determinarea distanței PQ din coordonatele determinate, care se compară cu distanța calculată din triunghiurile AQP și BQP cu ajutorul teoremei sinusurilor.

g. Observație. La rezolvarea acestei probleme se disting unele cazuri particulare. Un astfel de caz este cel din fig. (3.31). Indiferent de aspectul geometric al dispunerii punctelor, rezolvarea urmează totdeauna aceleași etape.

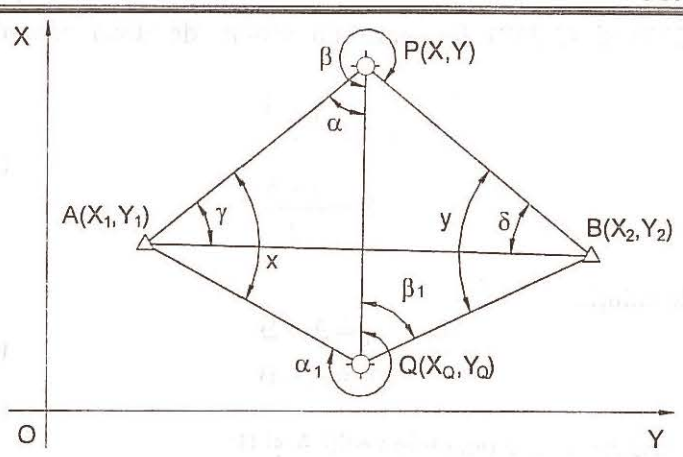


Figura 3.31
Caz particular. Procedeul Hansen

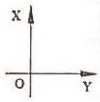
3.3.7.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului de îndesire 666 şi 1226. Procedeul Hansen. Rezolvarea analitică.

1. Date iniţiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 56, 85
Sistem de proiecţie "LOCAL"

Tabelul 3-41

Pct.	X [m]	Y [m]
56	9648.995	5916.022
85	7536.629	6177.881



2. Măsurători

Direcţiile orizontale compensate în staţiile 666 şi 1226 centrate, reduse şi reduse la planul de proiecţie

Tabel 3-42

PS	PV	Direcţii măsurate [g c cc]
666	56	73.1808
	85	204.9303
	1226	251.4979
1226	666	325.2366
	56	338.9243
	85	53.3259

Distanța măsurată între punctele 666 și 1226

$$d_{66-1226} = 610.815\text{m}$$

3. Schița vizelor

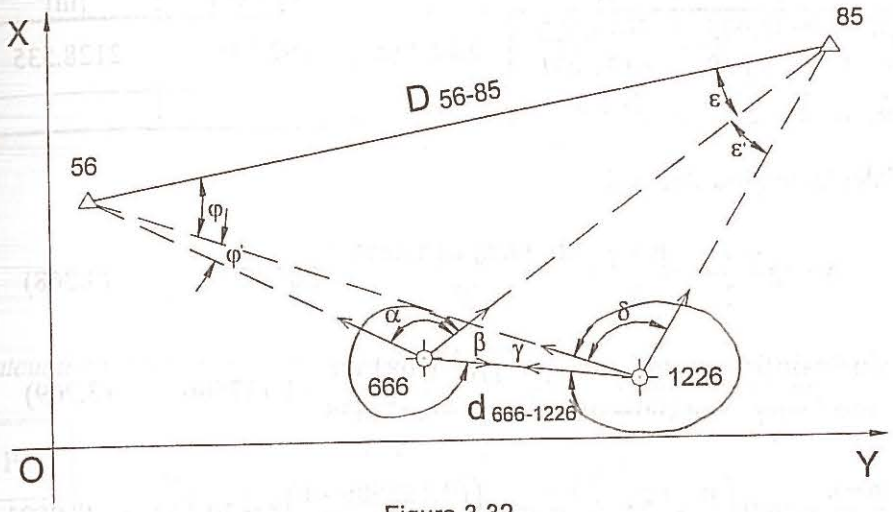


Figura 3.32
Procedeul Hansen. Rezolvarea analitică

4. Unghiurile α, β, γ și δ măsurate pe teren din punctele 666 și 1226:

a. Stația 666:

$$\alpha = dir_{85} - dir_{56} = 131.7495 \qquad (3.264)$$
$$\beta = dir_{1226} - dir_{85} = 46.5676$$

b. Stația 1226:

$$\gamma = dir_{56} - dir_{666} = 13.6877 \qquad (3.265)$$
$$\delta = dir_{85} - dir_{56} = 114.4016$$

5. Etape de calcul:

a. Calculul distanței D_{56-85} și a orientării θ_{56-85}:

$$D_{56-85} = \sqrt{(X_{85} - X_{56})^2 + (Y_{85} - Y_{56})^2} \qquad (3.266)$$

$$\theta_{56-85} = \text{arctg}\frac{Y_{85} - Y_{56}}{X_{85} - X_{56}} \qquad (3.267)$$

Calculul orientării şi distanţei între punctele vechi

Tabel 3-4

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AF} [g c cc]	Distanţa D_{AB} [m]
56	9648.995	5916.022	-0.123965	192.1482	2128.535
85	7536.629	6177.881			
Δ	-2112.366	261.859			

b. Calculul unghiurilor φ şi ε:

$$A = tg\frac{\varphi+\varepsilon}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{46.5676+13.6877}{2} = 30^{G}.1277 \qquad (3.268)$$

$$\mu = \frac{\sin\delta * \sin\beta * \sin(200-(\alpha+\beta+\gamma))}{\sin\alpha * \sin\gamma * \sin(200-(\beta+\gamma+\delta))} = \frac{0.081538}{0.072634} = 1.122586 \qquad (3.269)$$

$$B = \frac{\varphi-\varepsilon}{2} = arctg\left(\frac{\mu-1}{\mu+1} * tgA\right) = arctg\left(\left(\frac{1.122586-1}{1.122586+1}\right) * tg30.1277\right) = 1^{G}.8821 \qquad (3.270)$$

$$\varphi = A + B = 30.1277 + 1.8821 = 32.0098$$
$$\varepsilon = A - B = 30.1277 - 1.8821 = 28.2456 \qquad (3.271)$$

c. Calculul unghiurilor φ' şi ε'

$$\varphi' = 200^{G} - (\alpha+\beta+\gamma) = 200 - (131.7495 + 46.5676 + 13.6877) = 7^{G}.9952$$
$$\varepsilon' = 200^{G} - (\beta+\gamma+\delta) = 200 - (46.5676 + 25.3431 + 114.4016) = 25^{G}.3431 \qquad (3.272)$$

d. Calculul orientărilor $\theta_{56\text{-}666}$, $\theta_{56\text{-}1226}$, $\theta_{85\text{-}666}$, $\theta_{85\text{-}1226}$

$$\theta_{56-666} = \theta_{56-85} + \varphi + \varphi' = 192.1482 + 32.0098 + 7.9952 = 232^{G}.1532$$
$$\theta_{56-1226} = \theta_{56-85} + \varphi = 192.1482 + 32.0098 = 224^{G}.1580$$
$$\theta_{85-666} = \theta_{56-85} + 200 - \varepsilon = 192.1482 + 200 - 28.2456 = 363^{G}.9026$$
$$\theta_{85-1226} = \theta_{56-85} + 200 - \varepsilon - \varepsilon' = 192.1482 + 200 - 28.2456 - 25.3431 = 338^{G}.5596 \qquad (3.273)$$

e. Calculul coordonatelor punctelor 666 şi 1226 prin intersecţie înainte cu orientări:

$$X_{666} = \frac{Y_{56} - Y_{85} + X_{85}tg\theta_{85-666} - X_{56}tg\theta_{56-666}}{tg\theta_{85-666} - tg\theta_{56-666}}$$

$$Y_{666} = Y_{56} + (X_{666} - X_{56})tg\theta_{56-666} \qquad (3.274)$$

$$Y_{666} = Y_{85} + (X_{666} - X_{85})tg\theta_{85-666}$$

$$X_{1226} = \frac{Y_{56} - Y_{85} + X_{85}tg\theta_{85-1226} - X_{56}tg\theta_{56-1226}}{tg\theta_{85-1226} - tg\theta_{56-1226}}$$

$$Y_{1226} = Y_{56} + (X_{1226} - X_{56})tg\theta_{56-1226} \qquad (3.275)$$

$$Y_{1226} = Y_{85} + (X_{1226} - X_{85})tg\theta_{85-1226}$$

Calculul coordonatelor punctelor 666 şi 1226

Tabel 3-44

Pct.	X [m]	tgθ	Y [m]	Orientarea [g c cc]
56	9648.995	0.552893	5916.022	232.1532
666	8738.462		5412.595 / 5412.595	
85	7536.629	-0.636765	6177.881	363.9027
56	9648.995	0.398802	5916.022	224.1580
1226	8135.870		5312.585 / 5312.585	
85	7536.629	1.443987	6177.881	338.5596

f. Calculul coordonatelor cele mai probabile ale punctelor 666 şi 1226:

$$X_{666}=8738.462\ m \qquad Y_{666}=5412.595\ m \qquad (3.276)$$

$$X_{1226}=8135.870\ m \qquad Y_{1226}=5312.585\ m \qquad (3.277)$$

g. Verificarea calculelor:

$$D^{coord}_{666-1226} = d^{mas}_{666-1226}$$

$$\sqrt{(X_{1226} - X_{666})^2 + (Y_{1226} - Y_{666})^2} = d^{mas}_{666-1226} \qquad (3.278)$$

$$610.835m = 610.815m$$

3.3.7.2. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului de îndesire 666 şi 1226. Procedeul Hansen. Rezolvarea trigonometrică.

1. Date iniţiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 56, 85 sistem de proiecţie "LOCAL"

Tabel 3-45

Pct	X [m]	Y [m]
56	9648.995	5916.022
85	7536.629	6177.881

2. Măsurători

Direcţiile orizontale compensate în staţia 101 centrate, reduse şi reduse la planul de proiecţie

Tabel 3-46

PS	PV	Direcţii măsurate [g c cc]
522	56	73.1808
	85	204.9303
	1226	251.4979
1226	666	325.2366
	56	338.9243
	85	53.3259

3. Schiţa vizelor

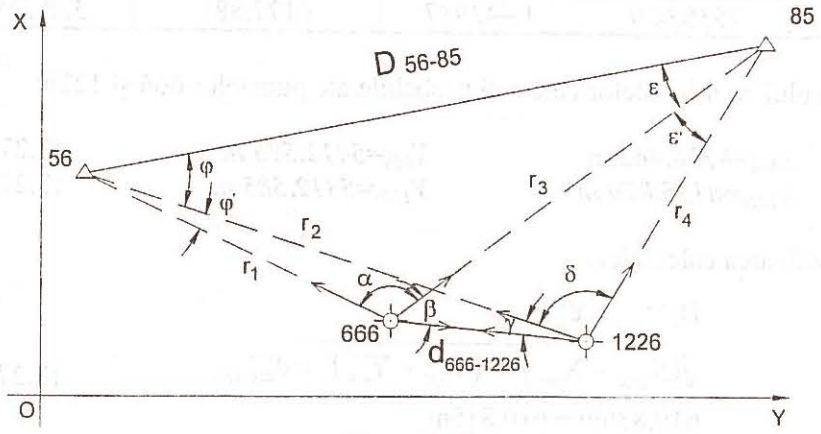


Figura 3.33
Procedeul Hansen. Rezolvarea trigonometrică

4. Unghiurilor α, β, γ şi δ măsurate pe teren din punctele 666 şi 1226:

St 666:

$$\alpha = dir_{85} - dir_{56} = 131.7495 \qquad (3.279)$$
$$\beta = dir_{1226} - dir_{85} = 46.5676$$

St 1226:

$$\gamma = dir_{56} - dir_{666} = 13.6877 \qquad (3.280)$$
$$\delta = dir_{85} - dir_{56} = 114.4016$$

5. Etape de calcul:

a. Calculul distanței $D_{56\text{-}85}$ şi a orientării $\theta_{56\text{-}85}$:

$$D_{56-85} = \sqrt{(X_{85} - X_{56})^2 + (Y_{85} - Y_{56})^2} \qquad (3.281)$$

$$\theta_{56-85} = \text{arctg}\frac{Y_{85} - Y_{56}}{X_{85} - X_{56}} \qquad (3.282)$$

Calculul orientării şi distanței între punctele vechi

Tabel 3-47

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanța D_{AB} [m]
56	9648.995	5916.022	-0.123965	192.1482	2128.535
85	7536.629	6177.881			
Δ	-2112.366	261.859			

b. Calculul unghiurilor φ şi ε

$$A = tg\frac{\varphi + \varepsilon}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{46.5676 + 13.6877}{2} = 30^{G}.1277 \qquad (3.283)$$

$$\mu = \frac{\sin\delta * \sin\beta * \sin(200 - (\alpha + \beta + \gamma))}{\sin\alpha * \sin\gamma * \sin(200 - (\beta + \gamma + \delta))} = \frac{0.081538}{0.072634} = 1.122586 \qquad (3.284)$$

$$B = \frac{\varphi - \varepsilon}{2} = \text{arctg}\left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} * tgA\right) = \text{arctg}\left(\left(\frac{1.122586 - 1}{1.122586 + 1}\right) * tg30.1277\right) = 1^{G}.8821 \qquad (3.285)$$

$$\varphi = A + B = 30.1277 + 1.8821 = 32.0098$$
$$\varepsilon = A - B = 30.1277 - 1.8821 = 28.2456 \qquad (3.286)$$

c. Calculul unghiurilor φ' şi ε'

$$\varphi' = 200^G - (\alpha + \beta + \gamma) = 200 - (131.7495 + 46.5676 + 13.6877) = 7^G.9952$$
$$\varepsilon' = 200^G - (\beta + \gamma + \delta) = 200 - (46.5676 + 25.3431 + 114.4016) = 25^G.3431 \quad (3.287)$$

d. Calculul orientărilor θ_{56-666}, $\theta_{56-1226}$, θ_{85-666}, $\theta_{85-1226}$

$$\theta_{56-666} = \theta_{56-85} + \varphi + \varphi' = 192.1482 + 32.0098 + 7.9952 = 232^G.1532$$
$$\theta_{56-1226} = \theta_{56-85} + \varphi = 192.1482 + 32.0098 = 224^G.1580$$
$$\theta_{85-666} = \theta_{56-85} + 200 - \varepsilon = 192.1482 + 200 - 28.2456 = 363^G.9026$$
$$\theta_{85-1226} = \theta_{56-85} + 200 - \varepsilon - \varepsilon' = 192.1482 + 200 - 28.2456 - 25.3431 = 338^G.5596 \quad (3.288)$$

e. Calculul distanțelor r_1, r_2, r_3, r_4

e1. în triunghiul 56-85-666

$$\frac{D_{56-85}}{\sin\alpha} = \frac{r_1}{\sin\varepsilon} = \frac{r_3}{\sin(\varphi + \varphi')} \quad (3.289)$$

$$M_1 = \frac{D_{56-85}}{\sin\alpha} = \frac{2128.535}{\sin 131.7495} = 2423.7598 \quad (3.290)$$

$$r_1 = M_1 * \sin\varepsilon = 2423.7598 * \sin 28.2455 = 1040.438\text{m}$$
$$r_3 = M_1 * \sin(\varphi + \varphi') = 2423.7598 * \sin(32.0098 + 7.9952) = 1424.803\text{m} \quad (3.291)$$

e2. în triunghiul 56-85-1226

$$\frac{D_{56-85}}{\sin\delta} = \frac{r_4}{\sin\varphi} = \frac{r_2}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')} \quad (3.292)$$

$$M_2 = \frac{D_{56-85}}{\sin\delta} = \frac{2128.535}{\sin 114.4016} = 2184.1853 \quad (3.293)$$

$$r_2 = M_2 * \sin(\varepsilon + \varepsilon') = 2184.1853 * \sin(28.2455 + 25.3431) = 1629.014\text{m}$$
$$r_4 = M_2 * \sin\varphi = 2184.1853 * \sin 32.0098 = 1052.532\text{m} \quad (3.294)$$

f. Calculul coordonatelor punctelor 666 şi 1226 prin radiere din punctele vechi 56 şi 85:

$$\begin{aligned} X^1_{666} &= X_{56} + r_1 \cos\theta_{56-666} = 8738.461\text{m} \\ Y^1_{666} &= Y_{56} + r_1 \sin\theta_{56-666} = 5412.595\text{m} \\ X^2_{666} &= X_{85} + r_3 \cos\theta_{85-666} = 8738.461\text{m} \\ Y^2_{666} &= Y_{85} + r_3 \sin\theta_{85-666} = 5412.595\text{m} \end{aligned} \qquad (3.295)$$

$$\begin{aligned} X^1_{1226} &= X_{56} + r_2 \cos\theta_{56-1226} = 8135.869\text{m} \\ Y^1_{1226} &= Y_{56} + r_2 \sin\theta_{56-1226} = 5312.586\text{m} \\ X^2_{1226} &= X_{85} + r_4 \cos\theta_{85-1226} = 8135.869\text{m} \\ Y^2_{1226} &= Y_{85} + r_4 \sin\theta_{85-1226} = 5312.586\text{m} \end{aligned} \qquad (3.295a)$$

g. Calculcului coordonatelor cele mai probabile ale punctelor 666 şi 1226

$$X_{666} = \frac{X^1_{666} + X^2_{666}}{2} = \frac{8738.461 + 8738.461}{2} = 8738.461\text{m}$$
$$Y_{666} = \frac{Y^1_{666} + Y^2_{666}}{2} = \frac{5412.595 + 5412.595}{2} = 5412.595\text{m} \qquad (3.295b)$$

$$X_{1226} = \frac{X^1_{1226} + X^2_{1226}}{2} = \frac{8135.869 + 8135.869}{2} = 8135.869\text{m}$$
$$Y_{1226} = \frac{Y^1_{1226} + Y^2_{1226}}{2} = \frac{5312.586 + 5312.586}{2} = 5312.586\text{m} \qquad (3.295c)$$

$$X_{666} = 8738.461\ m \qquad (3.295d)$$
$$Y_{666} = 5412.595\ m \qquad (3.295e)$$
$$X_{1226} = 8135.869\ m$$
$$Y_{1226} = 5312.586\ m$$

h. Verificarea calculelor:

$$D^{coord}_{666-1226} = d^{mas}_{666-1226}$$

$$\sqrt{(X_{1226} - X_{666})^2 + (Y_{1226} - Y_{666})^2} = d^{mas}_{666-1226} \qquad (3.296)$$

$$610.835\text{m} = 610.815\text{m}$$

3.3.8. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înapoi. Procedeul Cassini-Martinian

Determinarea coordonatelor prin intersecție înapoi prezintă numeroase avantaje, motiv pentru care numeroși specialiști în geodezie s-au ocupat de problema simplificării calculelor.

Printre specialiștii români care au avut contribuții la rezolvarea problemelor de acest gen, obținând rezultate practice de valoare, se numără și Leonida Gorodetzki, Alexandru Demianov și Octav Alexandru Martinian.

1. Date inițiale

Punctele vechi de coordonate cunoscute 1, 2 și 3 (fig. 3.34) sunt marcate și semnalizate, au fost recunoscute și identificate pe teren. Punctul P este marcat și eventual semnalizat pe teren, nu are coordonate cunoscute, pentru el dorim să determinăm coordonatele X și Y.

2. Măsurători

Sunt folosite instrumente de precizie și metode adecvate triangulației pentru măsurarea direcțiilor din punctul nou P către celelalte puncte vechi 1, 2 și 3 (fig. 3.34).

Cu ajutorul direcțiilor măsurate determinăm unghiurile α, β.

Dorim să determinăm, pe baza coordonatelor punctelor vechi vizate și a unghiurilor α, β, determinate, coordonatele rectangulare X și Y pentru punctul nou P.

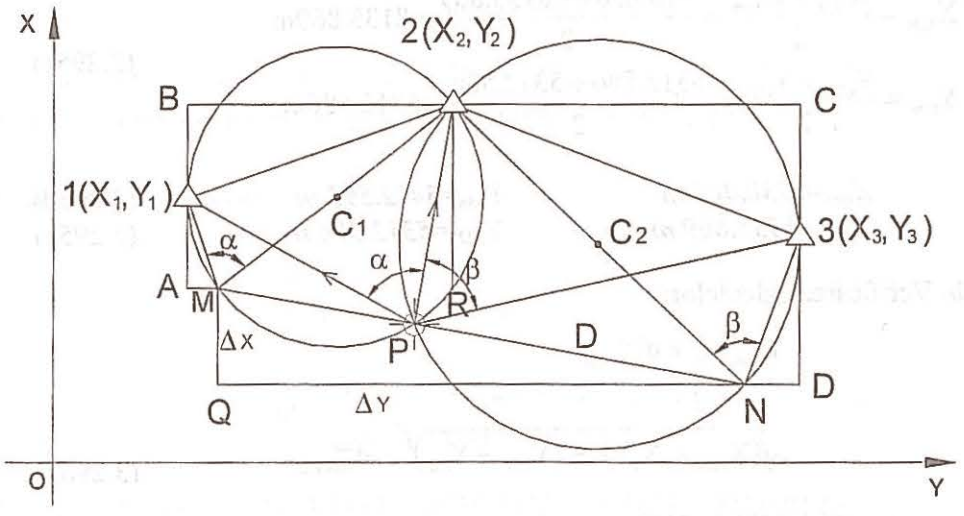


Figura 3.34
Procedeul Cassini – Martinian

3. Etape de calcul

a. Pentru a determina coordonatele punctului P vom efectua nişte construcţii auxiliare (fig. 3.34) :

a1. prin punctele 1, 2 şi P construim un cerc cu centrul în C_1

a2. prin punctele 2, 3 şi P construim un cerc cu centrul în C_2

Diametrele cercurilor C_1 şi C_2 construite din punctul 2 intersectează cercurile în punctele M respectiv N.

Se constată din fig. (3.34) că:

- unghiul $2PN=100^G$ (este cu vârful pe cerc şi subîntinde un arc egal cu un semicerc);
- unghiul $MP2=100^G$ (este cu vârful pe cerc şi subîntinde un arc egal cu un semicerc);
- unghiul $M12=100^G$ (este cu vârful pe cerc şi subîntinde un arc egal cu un semicerc);
- unghiul $23N=100^G$ (este cu vârful pe cerc şi subîntinde un arc egal cu un semicerc).

(3.297)

b. Suma unghiurilor MP2 şi 2PN este 200^G ceea ce conduce la concluzia că punctele M, P şi N sunt coliniare, de asemenea din constatările de mai sus rezultă că dreapta 2P este perpendiculară pe dreapta MN în punctul P, fiind deci înălţime în triunghiul M2N.

c. Din punct de vedere al geometriei analitice, coordonatele punctului P pot fi determinate ca intersecţie a dreptei MN cu perpendiculara 2P.

d. Efectuăm următoarele construcţii auxiliare: prin punctele M şi N ducem paralele la axele de coordonate, intersecţia acestora generând punctul Q, triunghiul MQN este dreptunghic în Q, prin punctele 2 şi P ducem paralele la axele de coordonate intersecţia acestora generează punctul R, triunghiul PR2 este dreptunghic în R.

notăm:

- segmentul P2 cu d;
- segmentul MN cu D.

(3.298)

e. Este ştiut că aria triunghiului M2N o putem calcula cu formula:

$$2S=d*D \tag{3.299}$$

Triunghiurile MQN şi PR2 sunt dreptunghice şi asemenea (au laturi paralele), putem scrie raporturile de asemănare:

$$\frac{PR}{MQ}=\frac{2R}{QN}=\frac{2P}{MN} \tag{3.300}$$

în relațiile (3.230) putem înlocui segmentele cu diferențe de coordonate și ținem seama de relațiile (3.298)

$$\frac{Y_2 - Y}{X_M - X_N} = \frac{X_2 - X}{Y_N - Y_M} = \frac{d}{D} \tag{3.301}$$

notăm :

$$\frac{d}{D} = r \tag{3.302}$$

din relațiile (3.301) și (3.302) rezultă :

$$\begin{aligned} Y_2 - Y &= r * (X_M - X_N) \\ X_2 - X &= r * (Y_N - Y_M) \end{aligned} \tag{3.303}$$

sau

$$\begin{aligned} X &= X_2 - r * (Y_N - Y_M) \\ Y &= Y_2 - r * (X_M - X_N) \end{aligned} \tag{3.304}$$

notăm :

$$\begin{aligned} \Delta X_{MN} &= X_M - X_N = \Delta X \\ \Delta Y_{MN} &= Y_N - Y_M = \Delta Y \end{aligned} \tag{3.305}$$

înlocuim relațiile (3.305) în relațiile (3.304) și obținem :

$$\begin{aligned} X &= X_2 - r * \Delta Y \\ Y &= Y_2 - r * \Delta X \end{aligned} \tag{3.306}$$

Relațiile (3.306) permit determinarea coordonatelor punctului P. Sunt necunoscute încă mărimile ΔX, ΔY și r.

Dorim să exprimăm mărimile ΔX, ΔY și r ca funcții de coordonatele punctelor vechi 1, 2 și 3 și de unghiurile determinate α și β.

f. Calculul mărimilor ΔX și ΔY

Se observă din fig. 3.34 că unghiul 1M2 are mărimea egală cu α, unghiul 2N3 are mărimea egală cu β.

Având în vedere relațiile (3.297) putem scrie :

$$\begin{aligned} ctg\alpha &= \frac{M1}{12} \\ ctg\beta &= \frac{N3}{23} \end{aligned} \tag{3.307}$$

Construim prin punctele 1 şi 3 o paralelă la axa OX şi prin punctele 2, M şi N o paralelă la axa OY. Rezultă triunghiurile dreptunghice 1AM, 2B1, 3C2 şi ND3. Triunghiurile 1AM şi 2B1 sunt asemenea, putem scrie raporturile de asemănare :

$$\frac{AM}{1B} = \frac{A1}{B2} = \frac{1M}{12} = ctg\alpha \qquad (3.308)$$

sau

$$\frac{Y_M - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{X_1 - X_M}{Y_2 - Y_1} = ctg\alpha \qquad (3.309)$$

rezultă :

$$\begin{aligned} Y_M - Y_1 &= (X_2 - X_1) * ctg\alpha \\ X_1 - X_M &= (Y_2 - Y_1) * ctg\alpha \end{aligned} \qquad (3.310)$$

sau

$$\begin{aligned} Y_M &= Y_1 + (X_2 - X_1) * ctg\alpha \\ X_M &= X_1 - (Y_2 - Y_1) * ctg\alpha \end{aligned} \qquad (3.311)$$

Triunghiurile ND3 şi 3C2 sunt asemenea, scriem raporturile de asemănare :

$$\frac{ND}{3C} = \frac{D3}{2C} = \frac{N3}{23} = ctg\beta \qquad (3.312)$$

sau

$$\frac{Y_3 - Y_N}{X_2 - X_3} = \frac{X_3 - X_N}{Y_3 - Y_2} = ctg\beta \qquad (3.313)$$

rezultă :

$$\begin{aligned} Y_3 - Y_N &= (X_2 - X_3) * ctg\beta \\ X_3 - X_N &= (Y_3 - Y_2) * ctg\beta \end{aligned} \qquad (3.314)$$

sau

$$\begin{aligned} Y_N &= Y_3 - (X_2 - X_3) * ctg\beta \\ X_N &= X_3 + (Y_2 - Y_3) * ctg\beta \end{aligned} \qquad (3.315)$$

g. Calculul diferențelor ΔX, ΔY
conform relațiilor (3.305), (3.311) și (3.315)

$$\Delta X=\Delta X_{MN}=X_N-X_M=X_3+(Y_2-Y_3)*ctg\beta-X_1+(Y_2-Y_1)*ctg\alpha \quad (3.316)$$
$$\Delta Y=\Delta Y_{MN}=Y_N-Y_M=Y_3-(X_2-X_3)*ctg\beta-Y_1-(X_2-X_1)*ctg\alpha$$

sau

$$\Delta X = X_3 - X_1 + (Y_2 - Y_3)*ctg\beta + (Y_2 - Y_1)*ctg\alpha$$
$$\Delta Y = Y_3 - Y_1 - (X_2 - X_3)*ctg\beta - (X_2 - X_1)*ctg\alpha \quad (3.317)$$

Relația (3.317) exprimă diferențele ΔX, ΔY ca funcții de elemente cunoscute, deci sunt calculabile

h. Calculul raportului r
Conform relației (3.302) și din relația (3.299) rezultă:

$$d=\frac{2S}{D} \quad (3.318)$$

înlocuim relația (3.318) în relația (3.302) și avem :

$$r=\frac{2S}{D^2} \quad (3.319)$$

din geometria analitică se știe că suprafața triunghiului M2N poate fi calculată cu ajutorul determinanților :

$$2S=\begin{vmatrix} X_M & Y_M & 1 \\ X_N & Y_N & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix}=X_M(Y_N-Y_2)-Y_M(X_N-X_2)+X_N*Y_2-Y_N*X_2 \quad (3.320)$$

în relația (3.320) adunăm și scădem termenul $X_N * Y_N$ și grupăm termenii

$$2S=X_M(Y_N-Y_2)-Y_M(X_N-X_2)+X_N*Y_N-X_N*Y_N+X_N*Y_2-Y_N*X_2=$$
$$=X_M(Y_N-Y_2)-Y_M(X_N-X_2)+Y_N*(X_N-X_2)+X_N*(Y_N-Y_2)=$$
$$=(X_N-X_2)*(Y_N-Y_M)-(Y_N-Y_2)*(X_N-X_M) \quad (3.321)$$

distanța D^2_{MN} necesară în relația (3.319), ținând seama de relația (3.321) este:

$$D^2_{MN} = (X_N - X_M)^2 + (Y_N - Y_M)^2 \qquad (3.322)$$

putem calcula raportul:

$$r = \frac{2S}{D^2} = \frac{(X_N - X_2)*(Y_N - Y_M) - (Y_N - Y_2)*(X_N - X_M)}{(X_N - X_M)^2 + (Y_N - Y_M)^2} \qquad (3.323)$$

ținem seama de notațiile (3.305) și notăm:

$$\begin{aligned} \delta X &= X_2 - X_N \\ \delta Y &= Y_2 - Y_N \end{aligned} \qquad (3.324)$$

relația (3.323) devine:

$$r = \frac{-\delta X * \Delta Y + \delta Y * \Delta X}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \qquad (3.325)$$

În relația (3.325) nu se cunosc valorile δX și δY, calculăm aceste valori în funcție de elementele cunoscute.

din relațiile (3.305) și (3.315) rezultă:

$$\begin{aligned} \delta X &= X_2 - X_N = X_2 - X_3 - (Y_2 - Y_3)\cdot ctg\beta \\ \delta Y &= Y_2 - Y_N = Y_2 - Y_3 + (X_2 - X_3)\cdot ctg\beta \end{aligned} \qquad (3.326)$$

i. Calculul coordonatelor punctului P se poate face acum cu relația (3.327)

$$\begin{aligned} X &= X_2 - r * \Delta Y \\ Y &= Y_2 + r \cdot \Delta X \end{aligned} \qquad (3.327)$$

j. Operații de control

j1. Controlul determinărilor se face obligatoriu folosind a patra viză către un alt punct vechi de coordonate cunoscute care va înlocui una din cele trei vize folosite inițial la determinarea coordonatelor punctului P

j2. Controlul calculelor efectuate constă în determinarea razelor fiecărui cerc din coordonatelor punctului P determinat și coordonatele punctelor vechi.

Astfel putem scrie (fig. 3.35) :

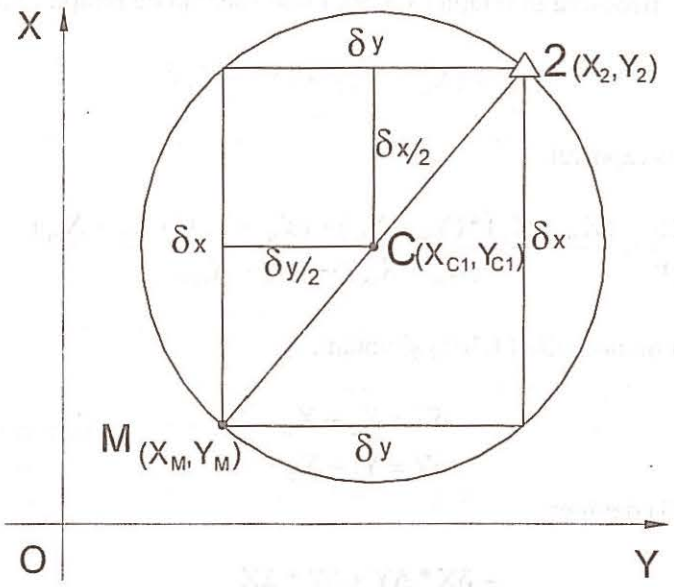


Figura 3.35
Procedeul Cassini – Martinian. Control al calculelor.

în cercul cu centrul în C_1:

$$C_1 1 = C_1 P = C_1 2 \tag{3.328}$$

în cercul cu centrul în C_2 :

$$C_2 3 = C_2 P = C_2 2 \tag{3.329}$$

Considerăm:

$$C_1 1 = C_1 P \tag{3.330}$$

relație care poate fi scrisă:

$$(X_{C_1} - X_1)^2 + (Y_{C_1} - Y_1)^2 = (X_{C_1} - X)^2 + (Y_{C_1} - Y)^2 \tag{3.331}$$

în care X_{C_1} și Y_{C_1} sunt coordonatele punctului C_1.

În relația (3.331) efectuăm calculele:

$$\begin{aligned} &X_{C_1}^2 + X_1^2 - 2X_{C_1}X_1 + Y_{C_1}^2 + Y_1^2 - 2Y_{C_1}Y_1 = \\ &= X_{C_1}^2 - X^2 - 2X_{C_1}X + Y_{C_1}^2 + Y^2 - 2Y_{C_1}Y \end{aligned} \tag{3.332}$$

sau

$$X_1^2 - X^2 + Y_1^2 - Y^2 - 2(X_{C_1}(X_1 - X) + Y_{C_1}(Y_1 - Y)) = 0 \tag{3.333}$$

Din fig. (3.35) putem scrie

$$X_{C_1} = X_2 - \frac{\delta X_{M2}}{2} = \frac{2X_2 - \delta X_{M2}}{2}$$
$$Y_{C_1} = Y_2 - \frac{\delta Y_{M2}}{2} = \frac{2Y_2 - \delta Y_{M2}}{2} \qquad (3.334)$$

înlocuim relațiile (3.334) în relațiile (3.333) și avem:

$$(X_1^2 - X^2) + (Y_1^2 - Y^2) - ((2X_2 - \delta X_{M2}) * (X_1 - X) + (2Y_2 - \delta Y_{M2}) * (Y_1 - Y)) = 0 \qquad (3.335)$$

Notăm:

$$K = 2X_2 - \delta X_{M2}$$
$$L = 2Y_2 - \delta Y_{M2} \qquad (3.336)$$

Relațiile (3.336) devin:

$$(X_1^2 - X^2) - K * (X_1 - X) + (Y_1^2 - Y^2) - L * (Y_1 - Y) = 0 \qquad (3.337)$$

Relația (3.337) reprezintă controlul calculelor
În cercul cu centrul în C_2 considerăm:

$$C_2 3 = C_2 P \qquad (3.338)$$

sau

$$(X_{C_2} - X_3)^2 + (Y_{C_2} - Y_3)^2 = (X_{C_2} - X)^2 + (Y_{C_2} - Y)^2 \qquad (3.339)$$

efectuăm calculele:

$$X_{C_2}^2 + X_3^2 - 2X_{C_2}X_3 + Y_{C_2}^2 + Y_3^2 - 2Y_{C_2}Y_3 = X_{C_2}^2 - X^2 - 2X_{C_2}X + Y_{C_2}^2 + Y^2 - 2Y_{C_2}Y \qquad (3.340)$$

în care X_{C_2} și Y_{C_2} sunt coordonatele punctului C_2
în relația (3.340) efectuăm calculele

$$X_3^2 - X^2 + Y_3^2 - Y^2 - 2(X_{C_2}(X_3 - X) + Y_{C_2}(Y_3 - Y)) = 0 \qquad (3.341)$$

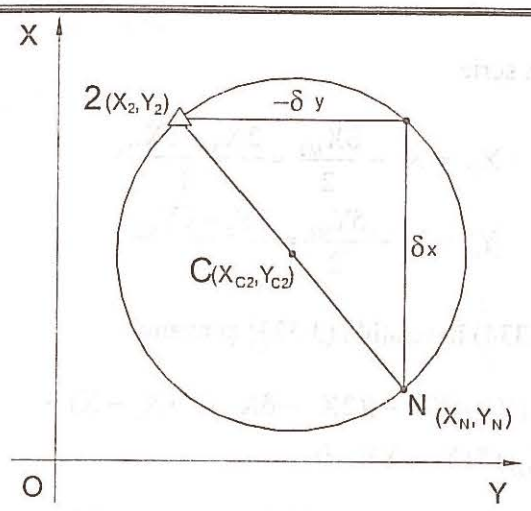


Figura 3.36
Procedeul Cassini – Martinian. Control a calculelor.

Din fig. (3.36) putem scrie:

$$X_{C_2} = X_2 - \frac{\delta X}{2} = \frac{2X_2 - \delta X}{2}$$
$$Y_{C_2} = Y_2 - \frac{\delta Y}{2} = \frac{2Y_2 - \delta Y}{2} \qquad (3.342)$$

înlocuim relațiile (3.342) în relațiile (3.341) și avem:

$$(X_3^2 - X^2) + (Y_3^2 - Y^2) - ((2X_2 - \delta X) * (X_3 - X) + (2Y_2 - \delta Y) * (Y_3 - Y)) = 0 \qquad (3.343)$$

notăm:

$$K' = 2X_2 - \delta X$$
$$L' = 2Y_2 - \delta Y \qquad (3.344)$$

Relația de control a calculelor devine:

$$(X_3^2 - X^2) - K'*(X_3 - X) + (Y_3^2 - Y^2) - L'*(Y_3 - Y) = 0 \qquad (3.345)$$

La această metodă toate calculele se pretează a fi programate pentru calculatoare electronice, nefiind necesară o interpretare a figurilor create de punctul P și punctele vechi ce se introduc în calcule.

3.3.8.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului de îndesire 202. Procedeul Cassini-Martinian.

1. Date inițiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 63, 77, 92, 73
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabel 3-48

Pct	X	Y
63	7794.871	7807.489
77	7006.267	8873.495
92	6058.081	7560.912
73	5902.607	5663.156

2. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stația 101 centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabel 3-49

PS	PV	Direcții măsurate [g c cc]
202	63	227.8989
	77	314.9047
	92	53.0452
	73	105.5005

3. Schița vizelor

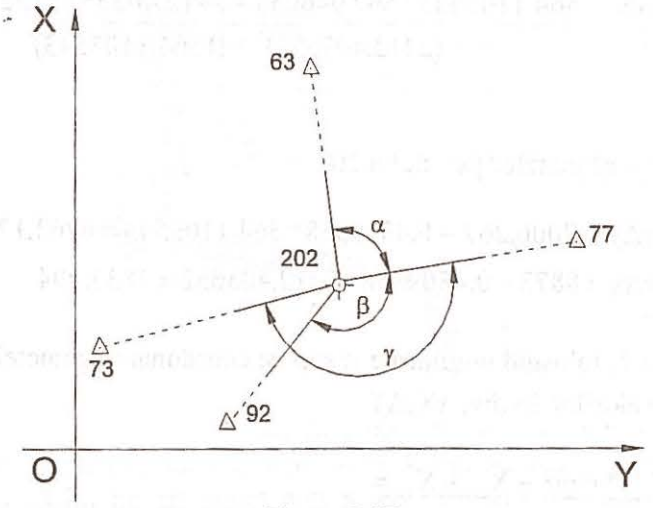


Figura 3.37
Procedeul Cassini – Martinian. Schița vizelor în punctul 202

4. Unghiurile orizontale α, β, γ măsurate pe teren

$$\alpha = dir_{77} - dir_{63} = 314.9047 - 227.8989 = 87.0058$$
$$\beta = dir_{92} - dir_{77} = 53.0452 - 314.9047 = 138.1405 \qquad (3.346)$$
$$\gamma = dir_{73} - dir_{77} = 105.5005 - 314.9047 = 190.5958$$

5. Etape de calcul:

a. Combinația 1 - folosind unghiurile α și β și coordonatele pct. 63, 77, 92

a1. Calculul valorilor $\delta X, \delta Y, \Delta X, \Delta Y$

$$\delta x = (Y_{77} - Y_{63})\,ctg\alpha - X_{63} + X_{77} =$$
$$= (8873.495 - 7807.489) * ctg87.0058 - 7794.871 + 7006.267 = -567.94605$$
$$\delta y = (X_{63} - X_{77}) * ctg\alpha - Y_{63} + Y_{77} =$$
$$= (7794.871 - 7006.267) * ctg87.0058 - 7807.489 + 8873.495 = 1229.24311$$
$$\Delta x = \delta x - X_{77} + X_{92} + (Y_{77} - Y_{92}) * ctg\beta = -567.946053 - 7005.267 +$$
$$+ 6058.081 + (8873.495 - 7560.912) * ctg138.1405 = -2412.403652$$
$$\Delta y = \delta y - Y_{77} + Y_{92} + (X_{92} - X_{77}) * ctg\beta = 1229.243111 - 8873.495 +$$
$$+ 7560.912 + (6058.081 - 7006.267) * ctg138.1405 = 564.110354 \qquad (3.347)$$

a2. Calculul raportului r

$$r = \frac{\Delta y \delta x - \Delta x \delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{564.1103543 * 567.946053 + 2412.403652 * 1229.243111}{(2412.403652)^2 + (1564.1103543)^2} =$$
$$= 0.430936 \qquad (3.348)$$

a3. Calculul coordonatelor punctului 202

$$X'_{202} = X_{77} - r\Delta y = 7006.267 - 0.4309358 * 564.1103543 = 6763.172$$
$$Y'_{202} = Y_{77} + r\Delta x = 8873 - 0.4309358 * 2412.403652 = 7833.904 \qquad (3.349)$$

b. Combinația 2, folosind unghiurile α și β și coordonatele punctelor 63, 77,73

b1. Calculul valorilor $\delta x, \delta y, \Delta X, \Delta Y$

$$\delta x = (Y_{77} - Y_{63}) * ctg\alpha - X_{63} + X_{77} =$$
$$= (8873.495 - 7807.489) * ctg87.0058 - 7794.871 + 7006.267 = -567.946053$$

$$\delta y = (X_{63} - X_{77}) * \operatorname{ctg}\alpha - Y_{63} + Y_{77} =$$
$$= (7794.871 - 7006.267) * \operatorname{ctg}87.0058 - 7807.489 + 8873.495 = 1229.243111$$
$$\Delta x = \delta x - X_{77} + X_{73} + (Y_{77} - Y_{73}) * \operatorname{ctg}\gamma = -567.946053 - 7006.267 +$$
$$+ 5902.607 + (8873.495 - 5663.156) * \operatorname{ctg}190.5958 = -23245.771241$$
$$\Delta y = \delta y - Y_{77} + Y_{73} + (X_{73} - X_{77}) * \operatorname{ctg}\gamma = 1229.243111 - 8873.495 + 5663.156 +$$
$$+ (5902.607 - 7006.267) * \operatorname{ctg}190.5958 = 5435.735527$$

(3.350)

b2. Calculul raportului r

$$r = \frac{\Delta y \delta x - \Delta x \delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{-5435.735527 * 567.946053 + 232455.771241 * 1229.243111}{(23245.771241)^2 + (5435.735527)^2} =$$
$$= 0.044722$$

(3.351)

b3. Calculul coordonatelor punctului 202

$$X_{202}^2 = X_{77} - r\Delta y = 7006.267 + 0.0447217295435.735527 = 6763.172$$
$$Y_{202}^2 = Y_{77} + r\Delta x = 8873.495 - 0.044721729 \cdot 23245.77124 = 7833.904 \quad (3.352)$$

6. Calculul coordonatelor probabile ale punctului 202

$$X_{202} = \frac{X^1{}_{202} + X^2{}_{202}}{2} = \frac{6763.172 + 6763.172}{2} = 6763.172\text{m}$$
$$Y_{202}^{-} = \frac{Y_{202}^1 + Y_{202}^2}{2} = \frac{7833.904 + 7833.904}{2} = 7833.904\text{m} \quad (3.353)$$

$$X_{202} = 6763.172\ m \qquad Y_{202} = 7833.904\ m \quad (3.354)$$

3.3.9. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înapoi. Procedeul Marek.

1. Date inițiale

Punctele vechi de coordonate cunoscute A, B, C şi D (fig. 3.38) sunt marcate şi semnalizate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. În regiunea în care dorim să efectuăm lucrări topografice marcăm şi eventual semnalizăm punctul R, căruia dorim să-i determinăm coordonate. Din acest punct există vizibilitate doar spre punctele vechi A şi B. Rezolvarea prin procedeul Marek, impune să găsim un alt punct nou S, pe care să-l marcăm şi eventual să-l semnalizăm, care să asigure vizibilitate reciprocă spre punctul R şi să asigure de asemenea vizibilitate spre alte două puncte vechi C şi D.

2. Măsurători

Sunt folosite instrumente de precizie și metode adecvate triangulație pentru măsurarea direcțiilor din punctele noi R și S către puncte vechi. S măsoară direcțiile indicate cu săgeți în fig. (3.38).

Cu ajutorul direcțiilor măsurate determinăm unghiurile α, β, γ și δ.

Dorim să determinăm, pe baza coordonatelor punctelor vechi vizate și unghiurilor α, β, γ și δ, coordonatele rectangulare X și Y pentru punctul nou R.

3. Etape de calcul:

a. în fig. (3.38) evidențiem unghiurile α', β', γ' și δ'

b. prin punctele R, A și B, respectiv S, C și D se construiesc cercuri

c. dreapta RS se prelungește până intersectează cele două cercuri în punctele și F

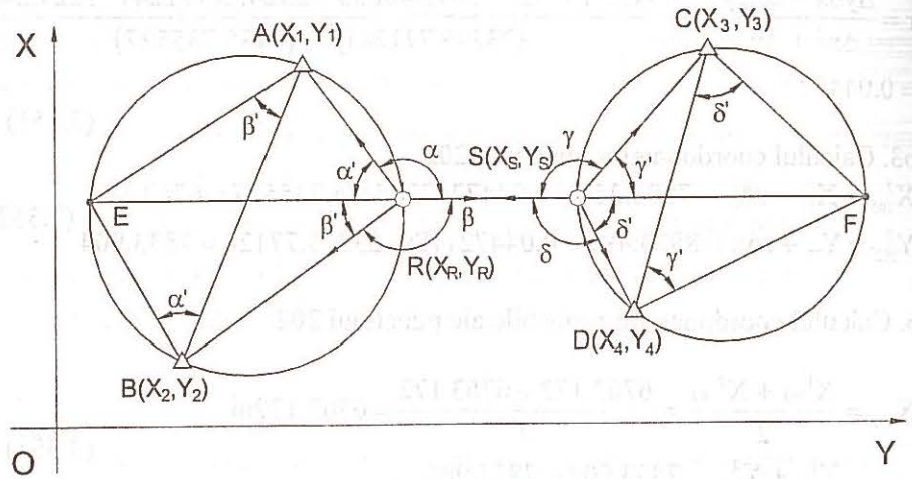


Figura 3.38
Procedeul Marek

d. Calculul valorilor unghiurilor α', β', γ' și δ'

$$\begin{aligned} \alpha' &= 200^g - \alpha \\ \beta' &= 200^g - \beta \\ \gamma' &= 200^g - \gamma \\ \delta' &= 200^g - \delta \end{aligned} \qquad (3.355)$$

se observă că:

$$\begin{aligned} &\text{unghiul } A21 = \alpha' \\ &\text{unghiul } A12 = \beta' \\ &\text{unghiul } 34B = \gamma' \\ &\text{unghiul } 43B = \delta' \end{aligned} \qquad (3.356)$$

ca fiind unghiuri cu vârfurile pe același cerc care subântind arcuri de cerc egal

e. Calculul orientărilor θ_{AB} şi θ_{CD}:

$$\theta_{AB} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB}} = \text{arctg}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$
$$\theta_{CD} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{CD}}{\Delta X_{CD}} = \text{arctg}\frac{Y_D - Y_C}{X_D - X_C} \qquad (3.357)$$

f. Calculul orientărilor θ_{AE}, θ_{BE}, θ_{CF}, θ_{DF}

$$\theta_{AE} = \theta_{AB} + \beta'$$
$$\theta_{BE} = \theta_{AB} \mp 200^G - \alpha' \qquad (3.358)$$
$$\theta_{CF} = \theta_{CD} - \delta'$$
$$\theta_{DF} = \theta_{CD} \mp 200^G + \gamma'$$

g. Calculul coordonatelor punctelor E şi F prin intersecţie înainte cu orientări. Calculul se face conform figurii de mai jos

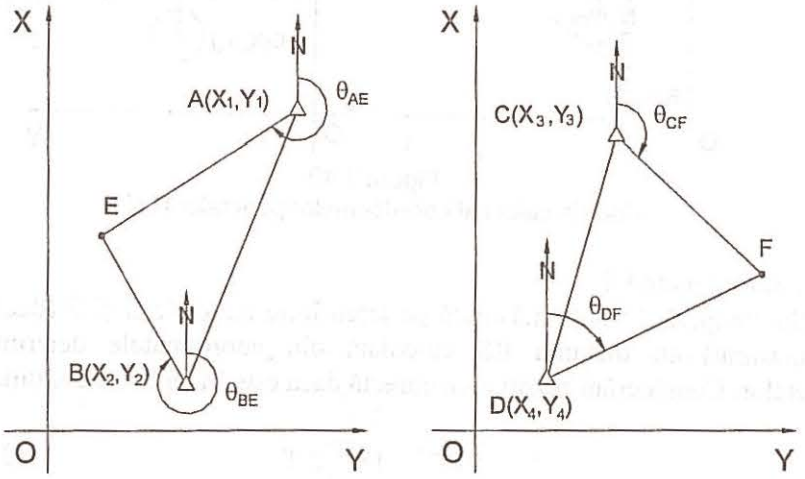


Figura 3.39
Mod de calcul al coordonatelor punctelor E şi F

h. Calculul orientărilor θ_{RS}
Din fig. (3.38) se observă că deoarece punctele E, R şi S sunt coliniare avem:

$$\theta_{EF} = \theta_{ER} = \theta_{ES} = \theta_{RS} = \theta_{RF} = \theta_{SF} \qquad (3.359)$$

$$\theta_{RS} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{EF}}{\Delta X_{EF}} = \text{arctg}\frac{Y_F - Y_E}{X_F - X_E} \qquad (3.360)$$

i. Calculul orientărilor θ_{AR}, θ_{BR}, θ_{CS}, θ_{DS}

$$\begin{aligned}\theta_{AR} &= \theta_{RS} - \alpha \mp 200^G \\ \theta_{BR} &= \theta_{RS} + \beta \mp 200^G \\ \theta_{CS} &= \theta_{RS} \mp 200^G + \gamma \mp 200^G \\ \theta_{DS} &= \theta_{RS} \mp 200^G - \delta \mp 200^G\end{aligned} \qquad (3.361)$$

j. Calculul coordonatelor punctelor R şi S prin intersecţie înainte cu orientări. Calculul se face conform figurii de mai jos

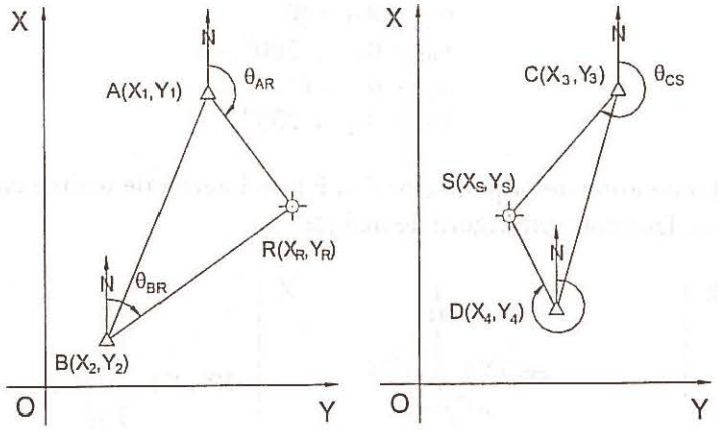


Figura 3.40
Mod de calcul al coordonatelor punctelor R şi S

k. Controlul metodei

k1. Se compară distanţa măsurată pe teren între punctele R şi S (dacă distar sa măsurat) cu distanţa RS calculată din coordonatele determinate punctelor. Considerăm rezolvarea corectă dacă este îndeplinită condiţia:

$$\left|D^{coord} - D^{mas}\right| \le T_D \qquad (3.362)$$

k2. Se calculează coordonatele punctului R utilizând coordonatele determin pentru punctul S, conform fig. (3.41)

Verificarea constă în faptul că va trebui să găsim coordonate, pen punctul R, care să se încadreze în toleranţele la determinarea coordonate aceluiaşi punct din combinaţii diferite, adică:

$$\begin{aligned}\left|X_{max} - X_{min}\right| &\le T_X \\ \left|Y_{max} - Y_{min}\right| &\le T_Y\end{aligned} \qquad (3.363)$$

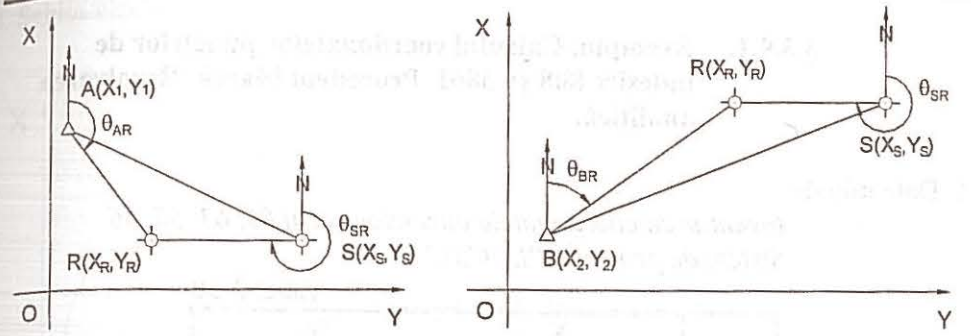


Figura 3.41
Mod de calcul al coordonatelor punctului R

k3. Verificarea calculelor constă în calculul suprafeței patrulaterului ERSF care trebuie să fie zero. Erorile inerente procesului de măsurare cât și cele conținute de coordonatele punctelor vechi fac ca suprafața patrulaterului să nu fie nulă. Dacă este îndeplinită condiția (3.362), unde T_S reprezintă toleranța admisibilă acestui caz de determinare, considerăm că rezolvarea problemei este corectă.

$$S_{ERFS} \leq T_S \qquad (3.364)$$

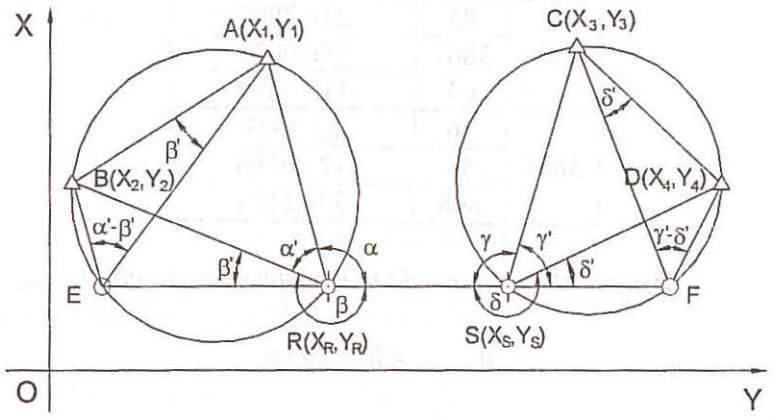


Figura 3.42
Caz particular la procedeul Marek

i. Observații.

i1. la rezolvarea acestei probleme, ca și la procedeul Hansen sunt întâlnite și cazuri particulare precum cel din fig. (3.42);

i2. determinarea coordonatelor se face prin calcule lungi și greoaie, totuși sunt situații când singura metodă de rezolvare a problemei este această metodă;

i3. în situațiile când există a altă metodă de rezolvare, metoda Marek este ocolită de inginerii geodezi din cauza complexității calculelor.

3.3.9.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctelor de îndesire 808 şi 3861. Procedeul Marek. Rezolvarea analitică.

1. Date iniţiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 85, 63, 55, 56
Sistem de proiecţie "LOCAL"

Tabel 3-50

Pct	X [m]	Y [m]
85	5351.210	6681.323
63	7001.153	6681.188
55	6529.011	4239.021
56	5423.022	4554.001

2. Măsurători

Direcţiile orizontale compensate în staţia 808 şi 3861 centrate, reduse şi reduse la planul de proiecţie

Tabel 3-51

PS	PV	Direcţii măsurate
808	85	215.7802
	3861	356.0023
	63	119.5679
3861	56	83.8623
	55	178.6796
	808	329.2174

Distanţa dintre punctele noi măsurată pe teren $D_{808-3861}$

$$d_{808-3861} = 802.265\text{m}$$

3. Unghiurile α,β şi γ,δ măsurate pe teren în punctele 3861 şi 808:

a. în staţia 3861:

$$\begin{aligned} \alpha &= dir_{808} - dir_{55} = 150.5378 \\ \beta &= dir_{56} - dir_{808} = 154.6449 \end{aligned} \qquad (3.365)$$

b. în staţia 808:

$$\begin{aligned} \gamma &= dir_{63} - dir_{3861} = 163.5656 \\ \delta &= dir_{3861} - dir_{85} = 140.2221 \end{aligned} \qquad (3.366)$$

4. Schița vizelor

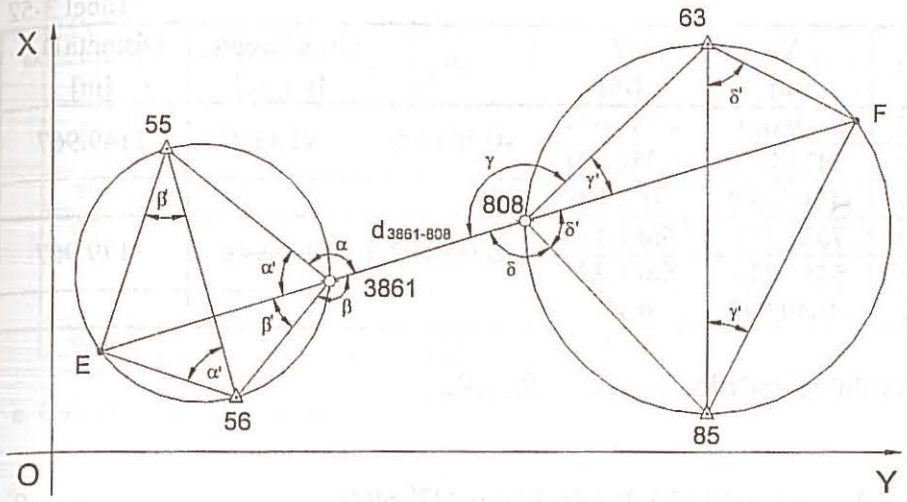


Figura 3.43
Procedeul Marek

5. Etape de calcul:

a. Calculul unghiurilor α^{c},β^{c} și γ^{c},δ^{c}:

$$\begin{aligned}\alpha^{c} &= 200-\alpha = 49.4622\\ \beta^{c} &= 200-\beta = 45.3551\\ \gamma^{c} &= 200-\gamma = 36.4344\\ \delta^{c} &= 200-\delta = 59.7779\end{aligned} \tag{3.367}$$

b. Calculul distanțelor și orientărilor între punctele vechi:

$$\begin{aligned}D_{55-56} &= \sqrt{(X_{56}-X_{55})^2+(Y_{56}-Y_{55})^2}\\ D_{63-85} &= \sqrt{(X_{85}-X_{63})^2+(Y_{85}-Y_{63})^2}\end{aligned} \tag{3.368}$$

$$\begin{aligned}\theta_{55-56} &= \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{55-56}}{\Delta X_{55-56}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_{56}-Y_{55}}{X_{56}-X_{55}}\\ \theta_{63-85} &= \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{63-85}}{\Delta X_{63-85}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_{85}-Y_{63}}{X_{85}-X_{63}}\end{aligned} \tag{3.369}$$

Calculul orientării şi distanţei între punctele vechi

Tabel 3-52

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanţa D_{AB} [m]
55	6529.011	4239.021	-0.284795	182.3370	1149.967
56	5423.022	4554.001			
Δ	-1105.989	314.980			
63	7001.153	6681.188	-0.000082	199.9948	1149.967
85	5351.210	6681.323			
Δ	-1649.943	0.135			

c. Calculul orientărilor $\theta_{55-E}, \theta_{56-E}, \theta_{63-F}, \theta_{85-F}$:

$$\begin{aligned}
\theta_{55-E} &= \theta_{55-56} + \beta' = 182.3370 + 45.3551 = 227^{G}.6921 \\
\theta_{56-E} &= \theta_{55-56} + 200 - \alpha' = 182.3370 + 200 - 49.4622 = 332^{G}.8748 \\
\theta_{63-F} &= \theta_{63-85} - \delta' = 199.9948 - 59.7779 = 140^{G}.2169 \\
\theta_{85-F} &= \theta_{63-85} + 200 + \gamma' = 199.9948 + 200 + 36.4344 - 400 = 36^{G}.4292
\end{aligned} \qquad (3.370)$$

d. Calculul coordonatelor punctelor E şi F prin intersecţie înainte cu orientări folosind pentru punctul E coordonatele punctelor vechi 55 şi 56 şi pentru punctul F coordonatele punctelor vechi 63 şi 85

$$\begin{aligned}
X_E &= \frac{Y_{55} - Y_{56} + X_{56} * tg\theta_{56-E} - X_{55} * tg\theta_{55-E}}{tg\theta_{56-E} - tg\theta_{55-E}} \\
Y_E &= Y_{55} + (X_E - X_{55}) * tg\theta_{55-E} \\
Y_E &= Y_{56} + (X_E - X_{56}) * tg\theta_{56-E}
\end{aligned} \qquad (3.371)$$

$$\begin{aligned}
X_F &= \frac{Y_{63} - Y_{85} + X_{85} * tg\theta_{85-F} - X_{63} * tg\theta_{63-F}}{tg\theta_{85-F} - tg\theta_{63-F}} \\
Y_F &= Y_{63} + (X_F - X_{63}) * tg\theta_{63-F} \\
Y_F &= Y_{85} + (X_F - X_{85}) * tg\theta_{85-F}
\end{aligned} \qquad (3.372)$$

Calculul coordonatelor punctelor E şi F

Tabel 3-53

Pct	X [m]	tgθ	Y [m]	Orientarea θ [g c cc]
55	6529.011	0.464671	4239.021	227.6921
E	5795.412		3898.139 3898.139	
56	5423.022	-1.761225	4554.001	332.8748
63	7001.153	-1.366567	6681.188	140.2169
F	6472.531		7403.585 7403.585	
85	5351.210	0.644117	6681.323	36.4292

e. Calculul orientării $\theta_{EF}(\theta_{3861-808})$:

$$\theta_{EF} = \theta_{3861-808} = \text{arctg}\frac{Y_F - Y_E}{X_F - X_E} \text{arctg}\frac{7403.585 - 3898.139}{6472.531 - 5795.412} = 87^G.8525 \quad (3.373)$$

f. Calculul orientărilor $\theta_{55-3861}, \theta_{56-3861}, \theta_{63-808}, \theta_{85-808}$:

$$\begin{aligned}
\theta_{55-3861} &= \theta_{3861-808} + \alpha' = 87.8525 + 49.4622 = 137^G.3147 \\
\theta_{56-3861} &= \theta_{3861-808} - \beta' = 87.8525 - 45.3551 = 42^G.4974 \\
\theta_{63-808} &= \theta_{3861-808} + 200 - \gamma' = 87.8525 + 200 - 36.4344 = 251^G.4181 \\
\theta_{85-808} &= \theta_{3861-808} + 200 + \delta' = 87.8525 + 200 + 59.7779 = 347^G.6304
\end{aligned} \quad (3.374)$$

g. Calculul coordonatelor punctelor 3861 şi 808 prin intersecţie înainte cu orientări din punctele 55 şi 56, respectiv 63 şi 85:

$$\begin{aligned}
X_{3861} &= \frac{Y_{55} - Y_{56} + X_{56} * \text{tg}\theta_{56-3861} - X_{55} * \text{tg}\theta_{55-3861}}{\text{tg}\theta_{56-3861} - \text{tg}\theta_{55-3861}} \\
Y_{3861} &= Y_{55} + (X_{3861} - X_{55}) * \text{tg}\theta_{55-3861} \\
Y_{3861} &= Y_{56} + (X_{3861} - X_{56}) * \text{tg}\theta_{56-3861}
\end{aligned} \quad (3.375)$$

$$\begin{aligned}
X_{808} &= \frac{Y_{63} - Y_{85} + X_{85} * \text{tg}\theta_{85-808} - X_{63} * \text{tg}\theta_{63-808}}{\text{tg}\theta_{85-808} - \text{tg}\theta_{63-808}} \\
Y_{808} &= Y_{65} + (X_{808} - X_{65}) * \text{tg}\theta_{65-808} \\
Y_{808} &= Y_{85} + (X_{808} - X_{85}) * \text{tg}\theta_{85-808}
\end{aligned} \quad (3.376)$$

Calculul coordonatelor punctelor 3861 şi 808

Tabel 3-54

Pct	X [m]	tgθ	Y [m]	Orientarea θ [g c cc]
55	6529.011	-1.506076	4239.021	137.3147
3861	6011.740		5018.070 5018.070	
56	5423.022	0.788271	4554.001	42.4974
63	7001.153	1.045574	6681.188	251.4181
808	6163.894		5805.772 5805.772	
85	5351.210	-1.077358	6681.323	347.6304

$$X_{3861}=6011.740\ m \qquad Y_{3861}=5018.070\ m \qquad (3.377)$$
$$X_{808}=6163.894\ m \qquad Y_{808}=5805.772\ m$$

h. Verificarea calculelor:

$$D^{coord}_{3861-808} = d^{mas}_{3861-808} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(X_{808}-X_{3861})^2+(Y_{808}-Y_{3861})^2} = d^{mas}_{3861-808} \qquad (3.378)$$
$$\Rightarrow 802.262m = 802.265m$$

3.3.9.2. Exemplu. Calculul coordonatelor punctelor de îndesire 808 şi 3861. Procedeul Marek. Rezolvarea trigonometrică.

1. Date iniţiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 85, 63, 55, 56
Sistem de proiecţie "LOCAL"

Tabel 3-55

Pct	X [m]	Y [m]
85	5351.210	6681.323
63	7001.153	6681.188
55	6529.011	4239.021
56	5423.022	4554.001

2. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stația 808 și 3861 centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabel 3-56

PS	PV	Direcții măsurate
808	85	215.7802
	3861	356.0023
	63	119.5679
3861	56	83.8623
	55	178.6796
	808	329.2174

3. Distanța dintre punctele noi măsurată pe teren $D_{808-3861}$:

$$d_{808-3861} = 802.265\text{m}$$

4. Schița vizelor

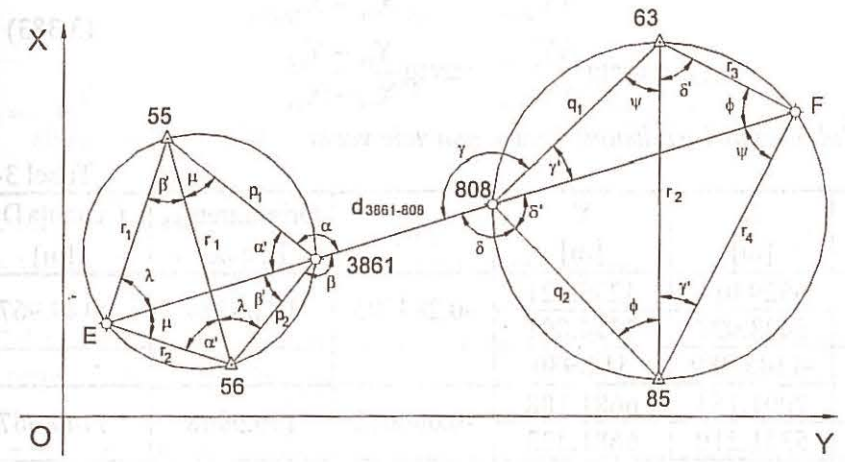


Figura 3.44
Procedeul Marek

5. Unghiurile α,β și γ,δ măsurate pe teren în punctele 3861 și 808:

a. în stația 3861:

$$\alpha = \text{dir}_{808} - \text{dir}_{55} = 150.5378$$
$$\beta = \text{dir}_{56} - \text{dir}_{808} = 154.6449 \qquad (3.379)$$

b. în stația 808:

$$\gamma = \text{dir}_{63} - \text{dir}_{3861} = 163.5656$$
$$\delta = \text{dir}_{3861} - \text{dir}_{85} = 140.2221 \qquad (3.380)$$

6. Etape de calcul:

a. Calculul unghiurilor $\alpha^{'},\beta^{'}$ şi $\gamma^{'},\delta^{'}$:

$$\begin{aligned}\alpha^{'} &= 200-\alpha = 49.4622\\ \beta^{'} &= 200-\beta = 45.3551\\ \gamma^{'} &= 200-\gamma = 36.4344\\ \delta^{'} &= 200-\delta = 59.7779\end{aligned} \qquad (3.381)$$

b. Calculul distanţelor şi orientărilor între punctele vechi:

$$\begin{aligned}D_{55-56} &= \sqrt{(X_{56}-X_{55})^2+(Y_{56}-Y_{55})^2}\\ D_{63-85} &= \sqrt{(X_{85}-X_{63})^2+(Y_{85}-Y_{63})^2}\end{aligned} \qquad (3.382)$$

$$\begin{aligned}\theta_{55-56} &= \text{arctg}\frac{\Delta Y_{55-56}}{\Delta X_{55-56}} = \text{arctg}\frac{Y_{56}-Y_{55}}{X_{56}-X_{55}}\\ \theta_{63-85} &= \text{arctg}\frac{\Delta Y_{63-85}}{\Delta X_{63-85}} = \text{arctg}\frac{Y_{85}-Y_{63}}{X_{85}-X_{63}}\end{aligned} \qquad (3.383)$$

Calculul orientării şi distanţei între punctele vechi

Tabel 3-57

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanţa D_{AB} [m]
55	6529.011	4239.021	-0.284795	182.3370	1149.967
56	5423.022	4554.001			
Δ	-1105.989	314.980			
63	7001.153	6681.188	-0.000082	199.9948	1149.967
85	5351.210	6681.323			
Δ	-1649.943	0.135			

c. Calculul orientărilor $\theta_{55-E},\theta_{56-E},\theta_{63-F},\theta_{85-F}$:

$$\begin{aligned}\theta_{55-E} &= \theta_{55-56}+\beta^{'} = 182.3370+45.3551 = 227^{G}.6921\\ \theta_{56-E} &= \theta_{55-56}+200-\alpha^{'} = 182.3370+200-49.4622 = 332^{G}.8748\\ \theta_{63-F} &= \theta_{63-85}-\delta^{'} = 199.9948-59.7779 = 140^{G}.2169\\ \theta_{85-F} &= \theta_{63-85}+200+\gamma^{'} = 199.9948+200+36.4344-400 = 36^{G}.4292\end{aligned} \qquad (3.384)$$

d. Calculul distanțelor r_1, r_2, r_3, r_4:

d1. în triunghiul 55-56-E

$$\frac{d_1}{\sin(\lambda+\mu)} = \frac{r_1}{\sin\alpha'} = \frac{r_2}{\sin\beta'} \tag{3.385}$$

$$M_1 = \frac{d_1}{\sin(\lambda+\mu)} = \frac{1149.967}{\sin(200-49.4622-45.3551)} = 1153.7883 \tag{3.386}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= M_1 * \sin\alpha' = 1153.7883 * \sin(49.4622) = 808.930\,\text{m} \\ r_2 &= M_1 * \sin\beta' = 1153.7883 * \sin(45.3551) = 754.208\,\text{m} \end{aligned} \tag{3.387}$$

d2. în triunghiul 63-F-85

$$\frac{d_2}{\sin(\phi+\psi)} = \frac{r_3}{\sin\gamma'} = \frac{r_4}{\sin\delta'} \tag{3.388}$$

$$M_2 = \frac{d_2}{\sin(\phi+\psi)} = \frac{1649.943}{\sin(200-36.4344-59.7779)} = 1652.8676 \tag{3.389}$$

$$\begin{aligned} r_3 &= M_2 * \sin\gamma' = 1652.8676 * \sin(36.4344) = 895.153\,\text{m} \\ r_4 &= M_2 * \sin\delta' = 1652.8676 * \sin(59.7779) = 1333.800\,\text{m} \end{aligned} \tag{3.390}$$

e. Calculul coordonatelor punctelor E și F prin dublă radiere din punctele 55 și 56, respectiv din punctele 63 și 85:

$$\begin{aligned} X_E^1 &= X_{55} + r_1 * \cos\theta_{55-E} = 6529.011 + 808.930 * \cos 140.2169 = 5795.412\,\text{m} \\ Y_E^1 &= Y_{55} + r_1 * \sin\theta_{55-E} = 4239.021 + 808.930 * \sin 140.2169 = 3898.139\,\text{m} \\ X_E^2 &= X_{56} + r_2 * \cos\theta_{56-E} = 5423.022 + 754.208 * \cos 332.8748 = 5795.412\,\text{m} \\ Y_E^2 &= Y_{56} + r_2 * \sin\theta_{56-E} = 4554.001 + 754.208 * \sin 332.8748 == 3898.139\,\text{m} \end{aligned} \tag{3.391}$$

$$\begin{aligned} X_E &= \frac{X_E^1 + X_E^2}{2} = \frac{5795.412 + 5795.412}{2} = 5795.412\,\text{m} \\ Y_E &= \frac{Y_F^1 + Y_F^2}{2} = \frac{3898.139 + 3898.139}{2} = 3898.139\,\text{m} \end{aligned} \tag{3.392}$$

$$X_F^1 = X_{63} + r_3 \cdot \cos\theta_{63-F} = 7001.153 + 895.1538 * \cos 140.2169 = 6472.531\,m$$
$$Y_F^1 = Y_{63} + r_3 \cdot \sin\theta_{63-F} = 6681.188 + 895.1538 * \sin 140.2169 = 7403.585\,m$$
$$X_F^2 = X_{85} + r_4 \cdot \cos\theta_{85-F} = 5351.210 + 1333.800 * \cos 36.4292 = 6472.531\,m$$
$$Y_F^2 = Y_{85} + r_4 \cdot \sin\theta_{85-F} = 6681.323 + 1333.800 * \sin 36.4292 = 7403.585\,m \quad (3.393)$$

$$X_F = \frac{X_F^1 + X_F^2}{2} = \frac{6472.531 + 6472.531}{2} = 6472.531\,m$$
$$Y_F = \frac{Y_F^1 + Y_F^2}{2} = \frac{7403.585 + 7403.585}{2} = 7403.585\,m \quad (3.394)$$

f. Calculul orientării $\theta_{E-F}(\theta_{3861-808})$:

$$\theta_{EF} = \theta_{3861-808} = \text{arctg}\frac{Y_F - Y_E}{X_F - X_E}\text{arctg}\frac{7403.585 - 3898.139}{6472.531 - 5795.412} = 87^G.8525 \quad (3.395)$$

g. Calculul orientărilor $\theta_{55-3861}, \theta_{56-3861}, \theta_{63-808}, \theta_{85-808}$:

$$\theta_{55-3861} = \theta_{3861-808} + \alpha' = 87.8525 + 49.4622 = 137^G.3147$$
$$\theta_{56-3861} = \theta_{3861-808} - \beta' = 87.8525 - 45.3551 = 42^G.4974$$
$$\theta_{63-808} = \theta_{3861-808} + 200 - \gamma' = 87.8525 + 200 - 36.4344 = 251^G.4181$$
$$\theta_{85-808} = \theta_{3861-808} + 200 + \delta' = 87.8525 + 200 + 59.7779 = 347^G.6304 \quad (3.396)$$

h. Calculul unghiurilor $\lambda, \mu, \varphi, \psi$:

$$\lambda = \theta_{E-F} - \theta_{E-55} = 87.8525 - (227.6921 - 200) = 60^G.1604$$
$$\mu = \theta_{E-56} - \theta_{E-F} = (332.8748 - 200) - 87.8525 = 45^G.0223$$
$$\varphi = \theta_{F-63} - \theta_{F-E} = (140.2169 + 200) - (87.8525 + 200) = 52^G.3644$$
$$\psi = \theta_{F-E} - \theta_{F-85} = (87.8525 + 200) - (36.4292 + 200) = 51^G.4233 \quad (3.397)$$

i. Calculul distanțelor p_1, p_2 și q_1, q_2:
i1. în triunghiul 55-3861-56

$$\frac{d_1}{\sin(\alpha' + \beta')} = \frac{p_1}{\sin\lambda} = \frac{p_2}{\sin\mu} \quad (3.398)$$

$$M_1 = \frac{d_1}{\sin(\alpha' + \beta')} = \frac{1149.967}{\sin(49.4622 + 45.3551)} = 1153.7883 \qquad (3.399)$$

$$p_1 = M_1 * \sin\lambda = 1153.7883 * \sin(60.1604) = 935.140\ \text{m}$$
$$p_2 = M_1 * \sin\mu = 1153.7883 * \sin(45.0223) = 749.633\ \text{m} \qquad (3.400)$$

i2. în triunghiul 63-85-808

$$\frac{d_2}{\sin(\gamma' + \delta')} = \frac{q_1}{\sin\psi} = \frac{q_2}{\sin\phi} \qquad (3.401)$$

$$M_2 = \frac{d_2}{\sin(\gamma' + \delta')} = \frac{1649.943}{\sin(36.4344 + 59.7779)} = 1652.8676 \qquad (3.402)$$

$$q_1 = M_2 * \sin\phi = 1652.8676 * \sin(51.4233) = 1211.345\ \text{m}$$
$$q_2 = M_2 * \sin\psi = 1652.8676 * \sin(52.3644) = 1194.590\ \text{m} \qquad (3.403)$$

j. Calculul coordonatelor punctelor 3861 şi 808 din punctele 55şi 56, respectiv din punctele 63 şi 85:

$$X^1_{3861} = X_{55} + p_1 * \cos\theta_{55\text{-}3861} = 6529.011 + 935.140 * \cos 137.3147 = 6011.740\text{m}$$
$$Y^1_{3861} = Y_{55} + p_1 * \sin\theta_{55\text{-}3861} = 4239.021 + 935.140 * \sin 137.3147 = 5018.070\text{m}$$
$$X^2_{3861} = X_{56} + p_2 * \cos\theta_{56\text{-}3861} = 5423.022 + 749.633 * \cos 42.4974 = 6011.740\text{m} \qquad (3.404)$$
$$Y^2_{3861} = Y_{56} + p_2 * \sin\theta_{56\text{-}3861} = 4554.001 + 749.633 * \sin 42.4974 = 5018.070\text{m}$$

$$X^1_{808} = X_{63} + q_1 \cdot \cos\theta_{63\text{-}808} = 7001.153 + 1211.345 * \cos 251.4181 = 6163.894\text{m}$$
$$Y^1_{808} = Y_{63} + q_1 \cdot \sin\theta_{63\text{-}808} = 6681.188 + 1211.345 * \sin 251.4181 = 5805.772\text{m}$$
$$X^2_{808} = X_{85} + q_2 \cdot \cos\theta_{85\text{-}808} = 5351.210 + 1194590 * \cos 347.6304 = 6163.894\text{m} \qquad (3.405)$$
$$Y^2_{808} = Y_{85} + q_2 \cdot \sin\theta_{85\text{-}808} = 6681.323 + 1194590 * \sin 347.6304 = 5805.772\text{m}$$

k. Calculul coordonatelor cele mai probabile ale punctelor 808 şi 3861

$$X_{3861} = \frac{X^1_{3861} + X^2_{3861}}{2} = \frac{6011.740 + 6011.740}{2} = 6011.740\ \text{m}$$
$$Y_{3861} = \frac{Y^1_{3861} + Y^2_{3861}}{2} = \frac{5018.070 + 5018.070}{2} = 5018.070\ \text{m} \qquad (3.406)$$

$$X_{808} = \frac{X^1_{808} + X^2_{808}}{2} = \frac{6163.894 + 6163.894}{2} = 6163.894\,\text{m}$$
$$Y_{808} = \frac{Y^1_{808} + Y^2_{808}}{2} = \frac{5805.772 + 5805.772}{2} = 5805.772\,\text{m} \quad (3.407)$$

$$X_{3861}=6011.740\ m \qquad Y_{3861}=5018.070\ m \quad (3.408)$$
$$X_{808}=6163.894\ m \qquad Y_{808}=5805.772\ m$$

I. Verificarea calculelor:

$$D^{coord}_{3861-808} = d^{mas}_{3861-808} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(X_{808} - X_{3861})^2 + (Y_{808} - Y_{3861})^2} = d^{mas}_{3861-808} \quad (3.409)$$
$$\Rightarrow 802.262\text{m} = 802.265\text{m}$$

3.4. *DETERMINAREA COORDONATELOR PUNCTELOR NOI PRIN PROCEDEUL INTERSECȚIEI GENERALIZATE ÎNAPOI*

Acest gen de problemă apare atunci când în zona de interes există trei puncte de coordonate cunoscute, nu găsim însă nici un punct nou din care să avem vizibilitate către toate cele trei puncte vechi.

1. Date inițiale

Punctele vechi de coordonate cunoscute A, B, şi C (fig. 3.45) sunt marcate şi semnalizate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. În zona în care dorim să efectuăm lucrări topografice marcăm şi eventual semnalizăm punctul nou P, căruia dorim să-i determinăm coordonate. Din acest punct există vizibilitate doar spre punctele vechi A şi B. Rezolvarea prin acest procedeu, impune să alegem două puncte Q şi R, pe care să le marcăm şi ventual să le semnalizăm şi care să asigure vizibilități indicate cu săgeți în fig. (3.45).

2. Măsurători

Sunt folosite instrumente de precizie şi metode adecvate triangulației pentru măsurarea direcțiilor din punctele noi P, Q şi R către puncte vechi. Se măsoară direcțiile indicate cu săgeți în fig. (3.45).

Cu ajutorul direcțiilor măsurate determinăm unghiurile α_i, β_i, unde i=P, Q, R.

Dorim să determinăm, pe baza coordonatelor punctelor vechi vizate şi a unghiurilor α_i şi β_i determinate, coordonatele rectangulare X şi Y pentru punctul nou P.

3. Etape de calcul:

a. În fig. (3.45) evidențiem unghiurile γ, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, φ și ψ și laturile a, b, p, q, r, d_1, d_2, d_3 și d_4

b. Calculul orientărilor dintre punctele vechi

$$\theta_{BA} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{BA}}{\Delta X_{BA}} = \frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2}$$
$$\theta_{BC} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{BC}}{\Delta X_{BC}} = \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} \qquad (3.410)$$

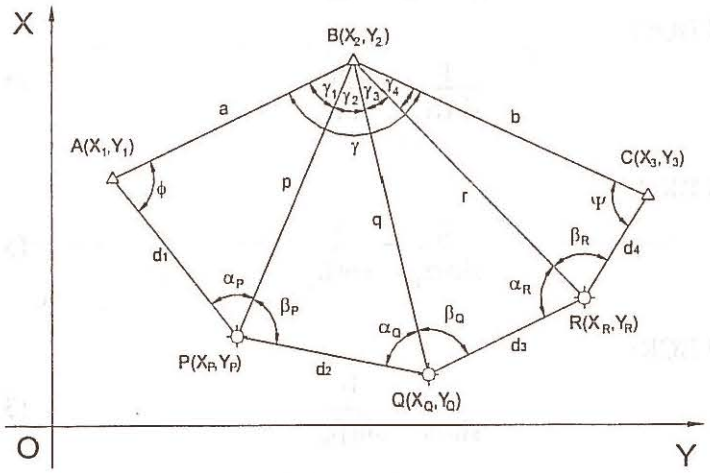


Figura 3.45
Procedeul intersecției generalizate înapoi

c. Calculul distanței între punctele vechi

$$D_{BA} = \sqrt{\Delta X_{BA}^2 + \Delta Y_{BA}^2} = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} = a$$
$$D_{BC} = \sqrt{\Delta X_{BC}^2 + \Delta Y_{BC}^2} = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2} = b \qquad (3.411)$$

d. Calculul unghiului γ

$$\gamma = \theta_{BA} - \theta_{BC} \qquad (3.412)$$

e. Determinarea unghiurilor φ și ψ

Suma unghiurilor în poligonul ABCRQP trebuie să îndeplinească condiția:

$$\varphi + \psi + \gamma + \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i + \beta_i) = 200^g * (n - 2) \qquad (3.413)$$

unde: n = 6 și I = P, Q, R

se poate calcula valoarea

$$A = \frac{\varphi + \psi}{2} = 100(n-2) - \frac{\gamma + \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i + \beta_i)}{2} \qquad (3.414)$$

scriem succesiv teorema sinusurilor în următoarele triunghiuri:
în triunghiul ABP:

$$\frac{a}{\sin\alpha_P} = \frac{p}{\sin\varphi} \qquad (3.415)$$

în triunghiul BQP:

$$\frac{p}{\sin\alpha_Q} = \frac{q}{\sin\beta_P} \qquad (3.416)$$

în triunghiul BRQ:

$$\frac{q}{\sin\alpha_R} = \frac{r}{\sin\beta_Q} \qquad (3.417)$$

în triunghiul BCR:

$$\frac{p}{\sin\psi} = \frac{b}{\sin\beta_R} \qquad (3.418)$$

înmulţim termen cu termen proporţiile de mai sus şi facem simplificările:

$$\frac{a}{\sin\alpha_P * \sin\alpha_Q * \sin\alpha_R * \sin\psi} = \frac{b}{\sin\varphi * \sin\beta_P * \sin\beta_Q * \sin\beta_R} \qquad (3.419)$$

de unde rezultă:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b * \sin\alpha_P * \sin\alpha_Q * \sin\alpha_R}{a * \sin\beta_P * \sin\beta_Q * \sin\beta_R} \qquad (3.420)$$

termenul al doilea al relaţiei (3.420) este calculabil, fiind format din elemente şi funcţii de elemente cunoscute, facem notaţiile:

$$\begin{aligned} b * \sin\alpha_P * \sin\alpha_Q * \sin\alpha_R &= P_1 \\ a * \sin\beta_P * \sin\beta_Q * \sin\beta_R &= P_2 \end{aligned} \qquad (3.421)$$

introducem relațiile (3.421) în relația (3.420) și avem:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{P_1}{P_2} \tag{3.422}$$

relației (3.422) îi aplicăm următoarea proprietate a proporțiilor

$$\frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\sin\varphi+\sin\psi}=\frac{P_1-P_2}{P_1+P_2} \tag{3.423}$$

după unele transformări și simplificări relația (3.423) devine:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\frac{P_1-P_2}{P_1+P_2}*\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2} \tag{3.424}$$

membrul drept din relația (3.424) este calculabil și deci putem determina valoarea funcției $\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}$.

notăm:

$$B=\frac{\varphi-\psi}{2} \tag{3.425}$$

din relațiile (3.425) și (3.424) avem:

$$B=\operatorname{arctg}\left(\frac{P_1-P_2}{P_1+P_2}*\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \tag{3.426}$$

Relațiile (3.414) și (3.426) formează un sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{aligned} A&=\frac{\varphi+\psi}{2}\\ B&=\frac{\varphi-\psi}{2}\end{aligned} \tag{3.427}$$

cu următorul sistem de soluții:

$$\begin{aligned}\varphi&=A+B\\ \psi&=A-B\end{aligned} \tag{3.428}$$

f. calculul unghiurilor γ, γ_1, γ_2, γ_3 și γ_4 :

- în triunghiul ABP:

$$\gamma_1 = 200^G - (\varphi + \alpha_P) \tag{3.429}$$

- în triunghiul BQP:

$$\gamma_2 = 200^G - (\beta_P + \alpha_Q) \tag{3.430}$$

- în triunghiul BRQ:

$$\gamma_3 = 200^G - (\beta_Q + \alpha_R) \tag{3.431}$$

- în triunghiul BCR:

$$\gamma_4 = 200^G - (\psi + \beta_R) \tag{3.432}$$

g. Calculul lungimilor laturilor p, q, r, d_1, d_2, d_3 și d_4

Aplicăm teorema sinusurilor în următoarele triunghiuri:

- în triunghiul ABP:

$$M_1 = \frac{a}{\sin\alpha_P} = \frac{b}{\sin\varphi} = \frac{d_1}{\sin\gamma_1} \tag{3.433}$$

$$M_1 = \frac{a}{\sin\alpha_P} \tag{3.433a}$$

$$\begin{aligned} b &= M_1 * \sin\varphi \\ d_1 &= M_1 * \sin\gamma_1 \end{aligned} \tag{3.434}$$

- în triunghiul BQP:

$$M_2 = \frac{p}{\sin\alpha_Q} = \frac{q}{\sin\beta_P} = \frac{d_2}{\sin\gamma_2} \tag{3.435}$$

$$M_2 = \frac{p}{\sin\alpha_Q} \tag{3.435a}$$

$$\begin{aligned} q &= M_2 * \sin\beta_P \\ d_2 &= M_2 * \sin\gamma_2 \end{aligned} \tag{3.436}$$

- în triunghiul BRQ:

$$M_3 = \frac{q}{\sin\alpha_R} = \frac{r'}{\sin\beta_Q} = \frac{d_3}{\sin\gamma_3} \tag{3.437}$$

$$M_3 = \frac{q}{\sin\alpha_R} \tag{3.437a}$$

$$r' = M_3 * \sin\beta_Q$$
$$d_3 = M_3 * \sin\gamma_3 \qquad (3.438)$$

- în triunghiul BCR:

$$M_4 = \frac{b}{\sin\beta_R} = \frac{r''}{\sin\psi} = \frac{d_4}{\sin\gamma_4} \qquad (3.439)$$

$$M_4 = \frac{b}{\sin\beta_R} \qquad (3.439a)$$

$$r'' = M_4 * \sin\psi$$
$$d_4 = M_4 * \sin\gamma_4 \qquad (3.440)$$

h. Controlul calculelor de lungimi de laturi

Se compară valorile obținute pentru latura r care trebuie să satisfacă relația:

$$|r' - r''| \leq T_D \qquad (3.441)$$

- unde T_D este toleranța admisă la aceste determinări.

i. Calculul orientărilor laturilor

$$\begin{aligned}
\theta_{AP} &= \theta_{BA} \mp 200^G + \varphi \\
\theta_{PQ} &= \theta_{AP} \mp 200^G + \alpha_P + \beta_P \\
\theta_{QR} &= \theta_{PQ} \mp 200^G + \alpha_Q + \beta_Q \\
\theta'_{RC} &= \theta_{QR} \mp 200^G + \alpha_R + \beta_R \\
\theta''_{RC} &= \theta_{BC} \mp 200^G - \psi \mp 200^G
\end{aligned} \qquad (3.442)$$

- pentru control se compară valorile obținute pentru θ_{RC} care trebuie să satisfacă relația:

$$|\theta'_{RC} - \theta''_{RC}| \leq T_\theta \qquad (3.443)$$

$$\theta'_{BP} = \theta_{BA} - \gamma_1 \qquad (3.444)$$
$$\theta''_{BP} = \theta_{BC} + (\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)$$

- pentru control se compară valorile obținute pentru θ_{RC} care trebuie să satisfacă relația:

$$|\theta'_{BP} - \theta''_{BP}| \leq T_\theta \qquad (3.445)$$

valoarea cea mai probabilă pentru θ_{BP} se calculează ca medie aritmetică sau ponderată:

$$\theta_{BP} = \frac{\theta'_{BP} - \theta''_{BP}}{2} \tag{3.446}$$

$$\theta_{BQ} = \theta_{BA} - (\gamma_1 + \gamma_2) \tag{3.447}$$
$$\theta_{BR} = \theta_{BA} - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3);$$

j. Determinarea coordonatelor punctelor noi P, Q şi R

Pentru calcul coordonatelor punctelor noi se utilizează procedeul intersecţiei înainte folosind dispozitivele de calcul din fig. (3.46). Se poate utiliza procedeul analitic al intersecţiei înainte sau trigonometric.

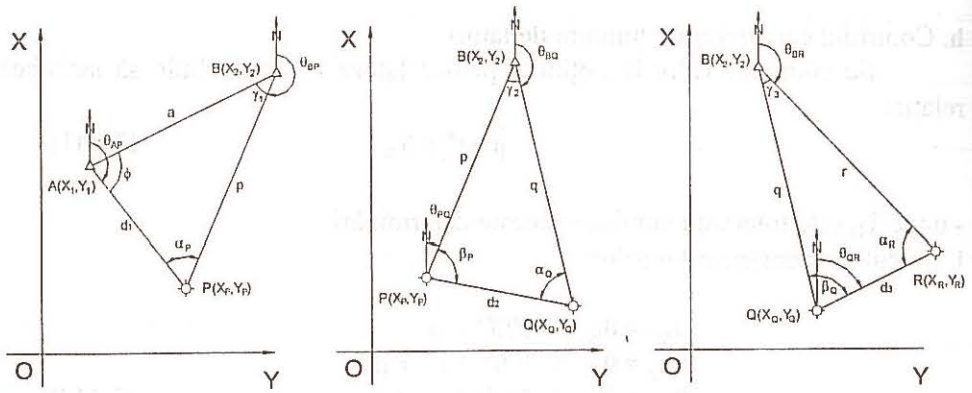


Figura 3.46
Mod de calcul al coordonatelor punctelor P, Q şi R

k. Controlul calculelor

Se calculează coordonatele punctului R utilizând coordonatele punctelor vechi B şi C, conform fig. (3.47).

Verificarea constă în faptul că va trebui să găsim coordonate, pentru punctul R, care să se încadreze în toleranţele la determinarea coordonatelor aceluiaşi punct din combinaţii diferite, adică:

$$\begin{aligned} |X_{max} - X_{min}| &\le T_X \\ |Y_{max} - Y_{min}| &\le T_Y \end{aligned} \tag{3.448}$$

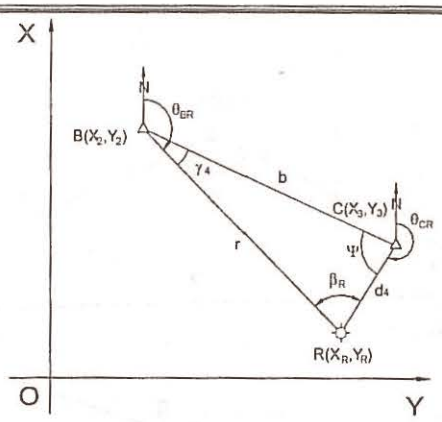


Figura 3.47
Mod de calcul al coordonatelor punctului R pentru control

3.4.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctelor de îndesire 1001 şi 1002. Procedeul intersecţiei înapoi generalizate

1. Date iniţiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 63, 1003, 1004 şi 1226
Sistem de proiecţie "LOCAL"

Tabel 3-58

Pct	X [m]	Y [m]
63	6167.942	7769.115
1003	8175.885	7221.263
1004	8959.043	6796.867
1226	8650.892	8188.289

2. Măsurători

Direcţiile orizontale compensate în staţia 1001 şi 1002 centrate, reduse şi reduse la planul de proiecţie

Tabel 3-59

PS	PV	Direcţii măsurate [g,c,cc]
1001	1004	161.7719
	1226	208.3797
	1002	261.5366
1002	1001	143.1313
	1226	278.6357
	1003	313.3433

3. Schița vizelor

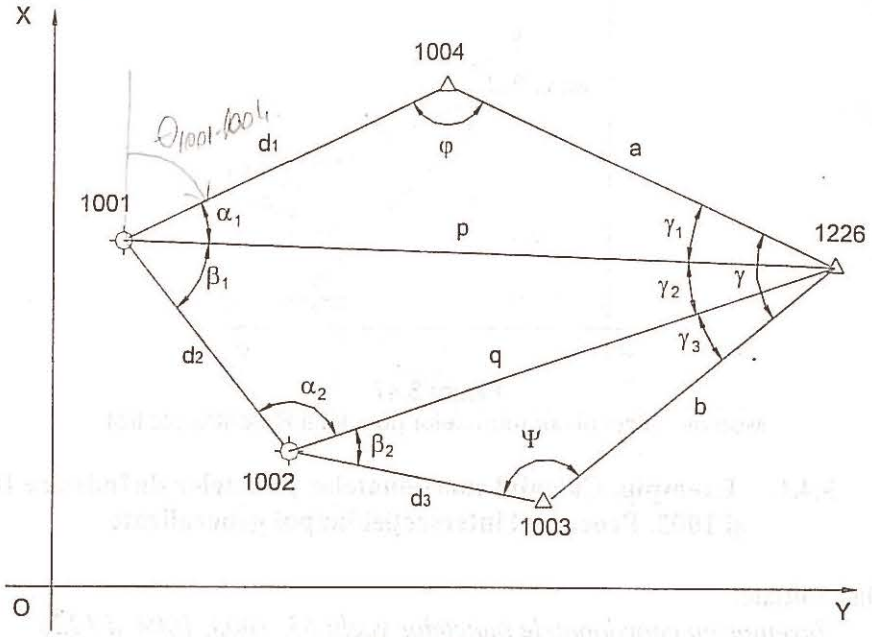


Figura 3.48
Procedeul intersecției generalizate înapoi

4. Unghiurile α, β măsurate pe teren în punctele 1001 și 1002:

a. stația 1001

$$\alpha_1 = dir_{1226} - dir_{1004} = 208.3797 - 191.7719 = 16^G.6078$$
$$\beta_1 = dir_{1002} - dir_{1226} = 261.5366 - 208.3797 = 53^G.1569 \qquad (3.449)$$

b. stația 1002

$$\alpha_2 = dir_{1226} - dir_{1001} = 278.6357 - 143.1313 = 135^G.5044$$
$$\beta_2 = dir_{1003} - dir_{1226} = 313.3433 - 278.6357 = 34^G.7076 \qquad (3.450)$$

5. Etape de calcul:

a. Calculul distanțelor și orientărilor între punctele vechi:

$$D_{1226-1004} = \sqrt{(X_{1004} - X_{1226})^2 + (Y_{1004} - Y_{1226})^2}$$
$$D_{1226-1003} = \sqrt{(X_{1003} - X_{1226})^2 + (Y_{1003} - Y_{1226})^2} \qquad (3.451)$$

$$\theta_{1226-1004} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{1226-1004}}{\Delta X_{1226-1004}} = \text{arctg}\frac{Y_{1004} - Y_{1226}}{X_{1004} - X_{1226}}$$
$$\theta_{1226-1003} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{1226-1003}}{\Delta X_{1226-1003}} = \text{arctg}\frac{Y_{1003} - Y_{1226}}{X_{1003} - X_{1226}} \quad (3.452)$$

Calculul orientării şi distanţei între punctele vechi

Tabel 3-60

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AE} [g c cc]	Distanţa D_{AB} [m]
1226	8650.892	8188.289	-4.515390	313.8749	1425.136
1004	8959.043	6796.867			
Δ	308.151	-1391.422			
1226	8650.892	8188.289	2.035686	270.9328	1077.404
1003	8175.885	7221.263			
Δ	-475.037	-967.026			

b. Calculul unghiului γ:

$$\gamma = \theta_{1226-1004} - \theta_{1226-1003} = 313.8749 - 270.9328 = 42^{G}.9421 \quad (3.453)$$

c. Calculul unghiurilor φ, ψ:

$$A \doteq \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{200 * (m-2) - (\sum \alpha_i + \sum \beta_i + \sum \gamma_i)}{2} =$$
$$= \frac{200 * (5-2) - (16.6078 + 135.5044 + 53.1569 + 34.7076 + 42.9421}{2} = 158^{G}.5406 \quad (3.454)$$

$$p_1 = b * \sin\alpha_1 * \sin\alpha_2 = 1077.391 * \sin 16.6078 * \sin 135.5044 = 235.7796$$
$$p_2 = 0 * \sin\beta_1 * \sin\beta_2 = 1425.136 * \sin 53.1569 * \sin 34.7076 = 547.8431 \quad (3.455)$$

$$\text{tg}\frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} * \text{tg}A = \frac{235.7796 - 547.8431}{235.7796 + 547.8431} * \text{tg}158.5406 = 0.303518 \quad (3.456)$$

$$B = \frac{\varphi - \psi}{2} = \text{arctg}\left(\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} * \text{tg}A\right) = 18^{G}.7600 \quad (3.457)$$

$$\Phi = A + B = 158.5406 + 18.7600 = 177^{G}.3006$$
$$\Psi = A - B = 158.5406 - 18.7600 = 139^{G}.7806 \quad (3.458)$$

d. Calculul orientarilor:

$$\theta_{1004-1001} = \theta_{1004-1226} + \Phi = 313.8749 - 200 + 177.3006 = 291^{G}.1755$$
$$\theta_{1001-1002} = \theta_{1001-1004} + \alpha_1 + \beta_1 = 291.1755 - 200 + 16.6078 + 53.1569 = 160^{G}.9702$$
$$\theta_{1002-1003} = \theta_{1002-1001} + \alpha_2 + \beta_2 = 160.9702 + 200 + 135.5044 + 34.7076 - 400 = 131^{G}.15$$
$$\theta_{1003-1226} = \theta_{1003-1002} + \Psi = 131.1522 + 200 + 139.7806 = 70^{G}.9328 \quad (3.459)$$

e. Calculul unghiurilor γ_i:

$$\gamma_1 = 200 - (\Phi + \alpha_1) = 200 - (177.3006 + 16.6078) = 6^{G}.0916$$
$$\gamma_2 = 200 - (\beta_1 + \alpha_2) = 200 - (53.1569 + 135.5044) = 11^{G}.3387 \quad (3.460)$$
$$\gamma_3 = 200 - (\beta_2 + \Psi) = 200 - (34.7076 + 139.7806) = 25^{G}.5118$$

f. Calculul orientărilor de la punctele vechi către punctele noi:

$$\theta_{1226-1001} = \theta_{1226-1004} - \gamma_1 = 313.8749 - 6.0916 = 307^{G}.7833$$
$$\theta_{1226-1002} = \theta_{1226-1004} - \gamma_1 - \gamma_2 = 313.8749 - 6.0916 - 11.3387 = 296^{G}.4446 \quad (3.461)$$

g. Calculul coordonatelor punctelor 1001 şi 1002 prin intersecţie înainte cu orientări

$$X_{1001} = \frac{Y_{1226} - Y_{1004} + X_{1004} * tg\theta_{1004-1001} - X_{1226} * tg\theta_{1226-1001}}{tg\theta_{1004-1001} - tg\theta_{1226-1001}}$$
$$Y_{1001} = Y_{1226} + (X_{1001} - X_{1226}) * tg\theta_{1226-1001} \quad (3.462)$$
$$Y_{1001} = Y_{1004} + (X_{1001} - X_{1004}) * tg\theta_{1004-1001}$$

$$X_{1002} = \frac{Y_{1226} - Y_{1003} + X_{1003} * tg\theta_{1003-1002} - X_{1226} * tg\theta_{1226-1002}}{tg\theta_{1003-1002} - tg\theta_{1226-1002}}$$
$$Y_{1002} = Y_{1226} + (X_{1002} - X_{1226}) * tg\theta_{1226-1002} \quad (3.463)$$
$$Y_{1002} = Y_{1003} + (X_{1002} - X_{1003}) * tg\theta_{1003-1002}$$

Calculul coordonatelor punctelor 1001 şi 1002

Tabel 3-61

Pct	X [m]	tgθ	Y [m]	Orientarea θ [g c cc]
1226	8650.892	-8.138510	8188.289	307.7833
1001	8886.102		6274.030 / 6274.030	
1004	8959.043	7.167966	6796.867	291.1755
1226	8650.892	17.887095	8188.289	296.4446
1002	8556.837		6505.911 / 6505.911	
1003	8175.885	-1.877802	7221.263	331.1522

$$X_{1001}=8886.102\ m \qquad Y_{1001}=6274.030\ m \qquad (3.464)$$
$$X_{1002}=8556.837\ m \qquad Y_{1002}=6505.911\ m$$

3.5. *DETERMINAREA COORDONATELOR PUNCTELOR NOI PRIN INTERSECŢIA LATERALĂ*

Intersecţia laterală este o metodă de determinare a coordonatelor punctelor combinată între metoda intersecţiei înainte şi metoda intersecţiei înapoi. Metoda foloseşte atât vize orientate de la puncte vechi de coordonate cunoscute spre punctul nou de determinat, ca la intersecţia înainte, cât şi vize date din punctul nou de determinat spre puncte vechi de coordonate cunoscute, ca la intersecţia înapoi.

În fig. (3.49) punctele A şi C sunt staţionabile iar punctele B şi D nu permit staţionarea.

1. Date iniţiale

Punctele vechi de coordonate cunoscute A, B, C şi D (fig. 3.49) sunt marcate şi semnalizate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. În zona în care dorim să efectuăm lucrări topografice marcăm şi eventual semnalizăm punctul nou P, căruia dorim să-i determinăm coordonate. Există vizibilitate reciprocă doar între punctele A şi P, între punctele C şi P există vizibilitate numai de la C spre P fig. (3.49).

Am putea să determinăm coordonatele punctului nou P prin intersecţie înapoi folosind unghiurile α şi β, determinarea nu are nici un control, fiind vizate din punctul P numai trei puncte de coordonate cunoscute (A, B şi D).

Putem apela la procedeul analitic al intersecţiei înainte pentru

determinarea coordonatelor punctului nou P, am obține rezultate nesatisfăcătoare din cauza unghiului obtuz de intersecție a vizelor duse din A și C.

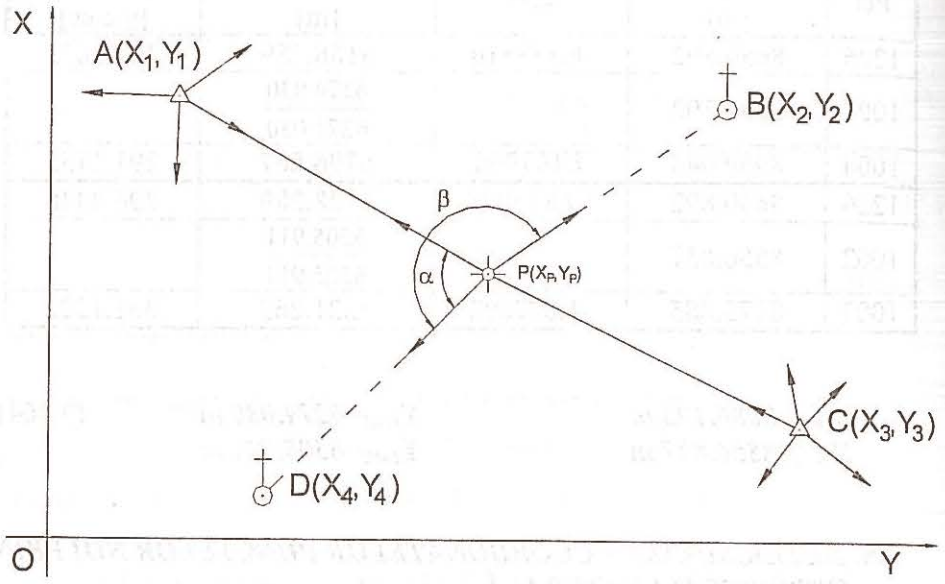


Figura 3.49
Intersecția laterală

2. Măsurători

Sunt folosite instrumente de precizie și metode adecvate triangulației pentru măsurarea direcțiilor din punctul nou P și din punctele vechi A și C. Se măsoară direcțiile indicate cu săgeți în fig. (3.49).

Cu ajutorul direcțiilor măsurate determinăm unghiurile α și β.

Dorim să determinăm, pe baza coordonatelor punctelor vechi vizate și a unghiurilor α și β determinate, coordonatele rectangulare X și Y pentru punctul nou P.

3. Etape de calcul:

a. Orientarea stațiilor vechi A și C de coordonate cunoscute

Obținem unghiul de orientare ale stației A, Z_A cu care se calculează θ_{AP}:

$$\theta_{AP} = z_A + v_P \qquad (3.465)$$

orientarea obținută θ_{AP} se numește generic "orientare exterioară".

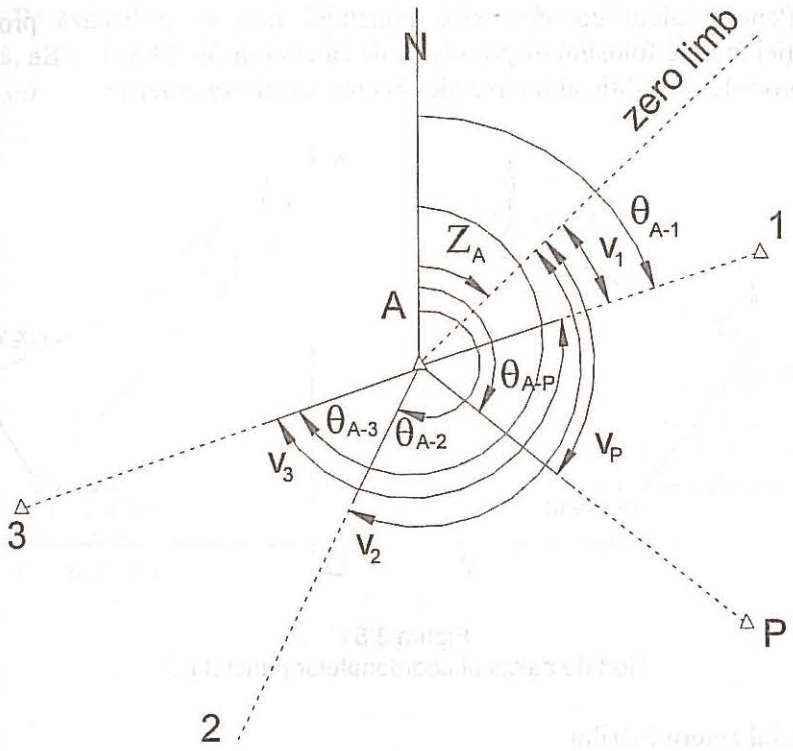


Figura 3.50
Orientarea vizelor în stația A de coordonate cunoscute

b. Calculul orientării inverse

$$\theta_{PA} = \theta_{AP} \mp 200^G \tag{3.466}$$

- cu ajutorul ei se calculează orientările θ_{PB} și θ_{PD}.

c. Calculul orientărilor θ_{PB} și θ_{PD}

$$\begin{aligned} \theta_{PB} &= \theta_{PA} - \alpha + \beta - 400^G \\ \theta_{PD} &= \theta_{PA} - \alpha \end{aligned} \tag{3.467}$$

- orientările θ_{PB} și θ_{PD} se numesc generic "orientări interioare".

d. Calculul orientărilor inverse

$$\begin{aligned} \theta_{BP} &= \theta_{PB} \mp 200^G \\ \theta_{DP} &= \theta_{PD} \mp 200^G \end{aligned} \tag{3.468}$$

e. Determinarea coordonatelor punctului nou P

Pentru calcul coordonatelor punctului nou se utilizează procedeul intersecției înainte folosind dispozitivele de calcul din fig. (3.51). Se poate utiliza procedeul analitic al intersecției înainte sau trigonometric.

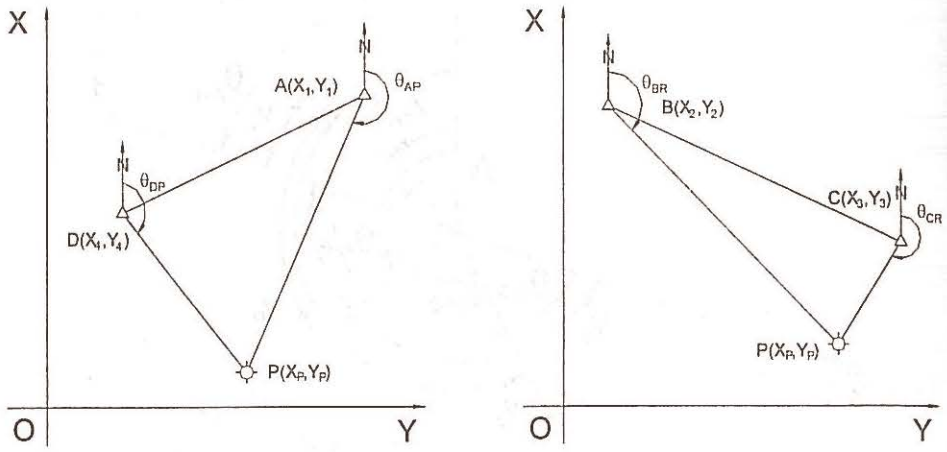


Figura 3.51
Mod de calcul al coordonatelor punctului P

f. Controlul determinărilor

Verificarea constă în faptul că va trebui să găsim coordonate, pentru punctul nou P, care să se încadreze în toleranțe la determinarea coordonatelor aceluiași punct din combimații diferite, adică:

$$\begin{aligned} |X_{max} - X_{min}| &\leq T_X \\ |Y_{max} - Y_{min}| &\leq T_Y \end{aligned} \qquad (3.469)$$

3.6. *DETERMINAREA COORDONATELOR PUNCTELOR NOI PRIN INTERSECȚIA LINIARĂ*

1. Date inițiale

Punctele vechi de coordonate cunoscute A (x_1, y_1) și B (x_2, y_2) sunt marcate, semnalizate, recunoscute și identificate pe teren. În regiunea în care dorim să efectuăm lucrări topografice marcăm și eventual semnalizăm punctul P căruia dorim să-i determinăm coordonatele x și y. Există vizibilitate reciprocă între punctele A și P, B și P, eventual și între A și B.

2. Măsurători

Pe teren, utilizând aparate pentru măsurarea lungimilor de precizie ridicată, sunt măsurate distanțele dintre punctele AP (L_{AP}), BP (L_{BP}) și eventual AB (L_{AB}).

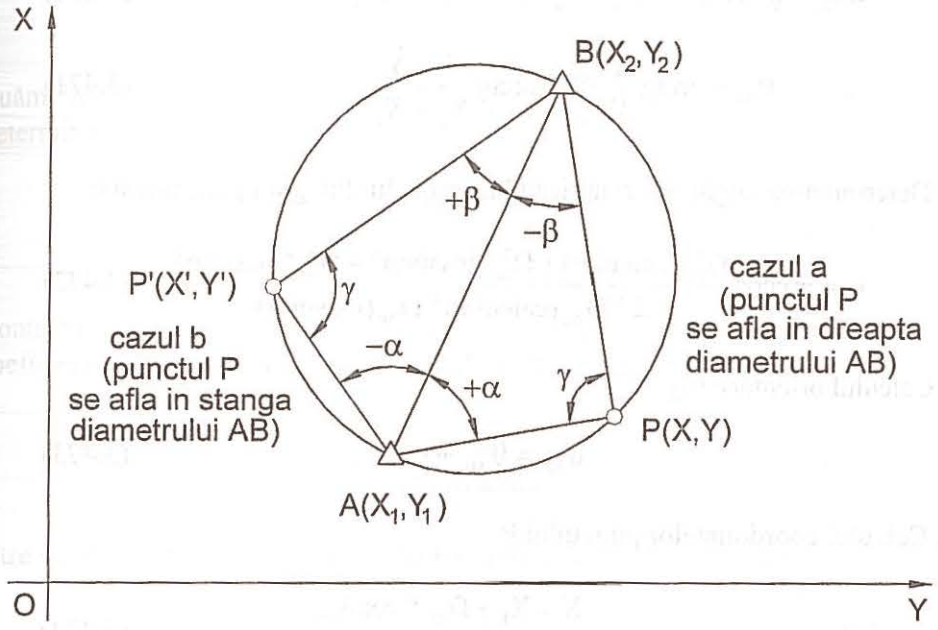


Figura 3.52
Intersecția liniară

3. Etape de calcul

a. Reducerea lungimilor măsurate la orizont

Lungimile măsurate sunt mari, este necesar, deci, ca pe lângă corecția de reducere la orizont să fie aplicată și corecția de reducere la planul de proiecție. Notăm valorile lungimilor măsurate (L), reduse la planul de proiecție cu D.

b. Desenăm un cerc circumscris triunghiului ABP. Determinările sunt precise dacă unghiul γ are valoarea de 100^G (AB este diametru), ele scad în precizie cu atât mai mult cu cât punctul P se află mai aproape de baza AB. Din fig. (3.52) se remarcă faptul că punctul P (cu aceleași măsurători) poate fi situat în partea stângă sau în partea dreaptă a bazei AB, din punct de vedere matematic rezolvarea fiind aceeași.

c. Facem următoarea convenție

Notăm cu semnul + unghiul α sau β de pe figură dacă acestea, având originea pe dreapta AB cresc, în sensul topografic spre punctul P de determinat,

şi cu semnul – dacă aceleaşi unghiuri cu aceeaşi origine descresc în sensul topografic spre punctul P.

d. Determinarea distanţei şi a orientării dintre punctele vechi AB.

$$D_{AB} = \sqrt{\Delta X_{AB}^2 + \Delta Y_{AB}^2} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \tag{3.470}$$

$$\theta_{AB} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \tag{3.471}$$

e. Determinarea unghiului α aplicând teorema lui Pitagora generalizată:

$$\alpha = \arccos\frac{D_{AB}^2(\text{calculat}) + D_{AP}^2(\text{masurat}) - D_{AP}^2(\text{masurat})}{2 * D_{AB}(\text{calculat}) * D_{AP}(\text{masurat})} \tag{3.472}$$

f. Calculul orientării θ_{AP}

$$\theta_{AP} = \theta_{AB} + \alpha \tag{3.473}$$

g. Calculul coordonatelor punctului P

$$\begin{aligned} X &= X_1 + D_{AP} * \cos\theta_{AP} \\ Y &= Y_1 + D_{AP} * \sin\theta_{AP} \end{aligned} \tag{3.474}$$

h. Controlul metodei:

h1. Calculăm distanţa D_{BP}

$$D_{BP} = \sqrt{\Delta X_{BP}^2 + \Delta Y_{BP}^2} = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2} \tag{3.475}$$

calculăm orientarea θ_{BP}

$$\theta_{BP} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{BP}}{\Delta X_{BP}} = \operatorname{arctg}\frac{Y - Y_2}{X - X_2} \tag{3.476}$$

Se poate verifica oricum, funcţie de semnul unghiului β dacă punctul P este situat în partea stângă sau dreaptă a laturii AB.

$$\beta = \theta_{BP} - \theta_{BA} \tag{3.477}$$

h2. În cazul în care s-a măsurat suplimentar şi am determinat distanța D_{AB} între punctele vechi, se va calcula un factor de scară:

$$q = \frac{D_{AB}(\text{calculat})}{D_{AB}(\text{masurat})} \tag{3.478}$$

Luăm în considerare factorul de scară q şi coordonatele punctului P vor fi determinate cu relația:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + (q * D_{AP}) * \cos\theta_{AP} \\ Y &= Y_1 + (q * D_{AP}) * \sin\theta_{AP} \end{aligned} \tag{3.479}$$

Controlul suplimentar față de cel prezentat mai înainte constă în calculul coeficientului de scară utilizând distanțele dintre punctele B şi P astfel:

$$q' = \frac{D_{BP}(\text{calculat})}{D_{BP}(\text{masurat})} \tag{3.480}$$

Între cei doi coeficienți de scară calculați trebuie să fie îndeplinită relația:

$$|q - q'| \leq \text{Toleranta} \tag{3.481}$$

Precizia metodei

Precizia intersecției liniare drepte depinde de precizia de măsurare a distanțelor D_{AP}, D_{BP}, de unghiul γ sub care se realizează intersecția laturilor D_{AP}, D_{BP}.
Evaluarea preciziei se face pornind de la relația ce defineşte eroarea planimetrică a punctului:

$$\sigma^2_P = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \tag{3.482}$$

Abaterile standard empirice σ^2_X, σ^2_Y ce corespund direcțiilor celor două axe de coordonate vor fi calculate ca erori ale funcțiilor de mărimi măsurate direct:

$$\begin{aligned} X &= X(D_{AP}, D_{BP}) \\ Y &= Y(D_{AP}, D_{BP}) \end{aligned} \tag{3.483}$$

pentru care vom scrie:

$$\sigma^2_X = \left(\frac{\partial X}{\partial D_{AP}}\right)^2 \sigma^2_{D_{AP}} + \left(\frac{\partial X}{\partial D_{BP}}\right)^2 \sigma^2_{D_{BP}} \qquad (3.484)$$

$$\sigma^2_Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial D_{AP}}\right)^2 \sigma^2_{D_{AP}} + \left(\frac{\partial Y}{\partial D_{BP}}\right)^2 \sigma^2_{D_{BP}}$$

Efectuând calculele obținem:

$$\sigma_P = \frac{\sigma_r \sqrt{2}}{\sin\gamma} \qquad (3.485)$$

ceea ce ne arată că față de un σ_r dat, precizia intersecției liniare simple este maximă când aceasta se realizează sub un unghi drept. Această condiție geometrică este îndeplinită pentru punctul nou de determinat P, când acesta se află pe cercul având ca diametru latura AB.
Această condiție se are în vedere la proiectarea rețelelor liniare, în sensul că fiecare punct nou, a cărui poziție urmează să fie determinată pe baza măsurătorilor de distanțe, va trebui să aibă cel puțin o bază de intersecție care să îndeplinească măcar aproximativ condiția menționată.

3.6.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului de îndesire 1003 şi 1004. Procedeul intersecției liniare.

1. Date inițiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 73, 1226
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabel 3-62

Pct	X [m]	Y [m]
73	4587.205	8214.708
1226	4590.326	5954.150

2. Măsurători

Distanțele măsurate pe teren:

$d_1 = 1077.379\text{m}$ $d_2 = 1290.887\text{m}$ $d_3 = 890.743\text{m}$ $d_4 = 1425.121\text{m}$

$D_{1226-73} = 2260.563\text{m}$

3. Schița vizelor

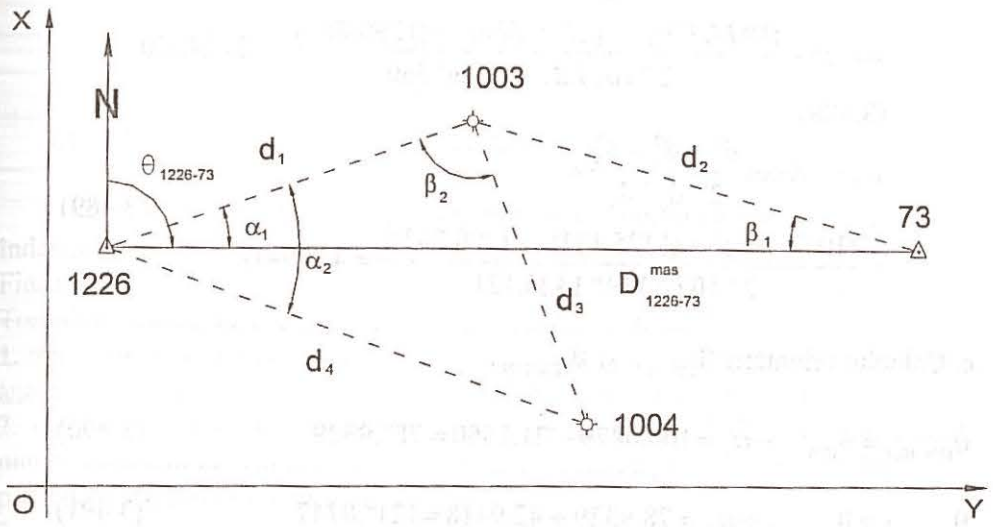


Figura 3.53
Intersecția liniară

4. Etape de calcul:

a. Calculul distanței $D_{1226-73}$ și al orientării $\theta_{1226-73}$:

$$D_{1226-73} = \sqrt{(X_{73} - X_{1226})^2 + (Y_{73} - Y_{1226})^2} \qquad (3.486)$$

$$\theta_{1226-73} = \text{arctg}\frac{Y_{73} - Y_{1226}}{X_{73} - X_{1226}} \qquad (3.487)$$

Calculul orientării și distanței între punctele vechi

Tabel 3-63

Pct.	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{AB}$	Orientarea θ_{AB} [g c cc]	Distanța D_{AB} [m]
1226	4590.326	5954.150	-724.104454	100.0879	2260.560
73	4587.205	8214.708			
Δ	-3.121	2259.93			

b. Calculul unghiului α_1 și α_2:

$$\alpha_1 = \arccos\frac{d_1^2 + D_{1226-73}^2 - d_2^2}{2 \cdot d_1 \cdot D_{1226-73}} =$$

$$= \arccos\frac{(1077.379)^2 + (2260.560)^2 - (1290.887)^2}{2 * 1077.379 * 2260.560} = 21^G.1550 \quad (3.488)$$

$$\alpha_2 = \arccos\frac{d_1^2 + d_4^2 - d_3^2}{2 * d_1 * d_4} =$$

$$= \frac{(1077.379)^2 + (1425.121)^2 - (890.743)^2}{2 * 1077.379 * 1425.121} = 42^G.9418 \quad (3.489)$$

c. Calculul orientării $\theta_{1226-1003}$ și $\theta_{1226-1004}$:

$$\theta_{1226-1003} = \theta_{1226-73} - \alpha_1 = 100.0879 - 21.1550 = 78^G.9329 \quad (3.490)$$

$$\theta_{1226-1004} = \theta_{1226-1003} + \alpha_2 = 78.9329 + 42.9418 = 121^G.8747 \quad (3.491)$$

d. Calculul factorului de scară *q*:

$$q = \frac{D_{1226-73}^{coord}}{D_{1226-73}^{mas}} = \frac{2260.560}{2260.563} = 0.999998673 \quad (3.492)$$

e. Calculul coordonatelor punctului 1003 și 1004:

$$X_{1003} = X_{1226} + q \cdot d_1 \cdot \cos\theta_{1226-1003} =$$
$$= 4590.326 + 0.999998673 * 1077.379 * \cos(78.9329) = 4940.382\,m$$
$$Y_{1003} = Y_{1226} + q \cdot d_1 \cdot \sin\theta_{1226-1003} = \quad (3.493)$$
$$= 5954.150 + 0.999998673 * 1077.379 * \sin(78.9329) = 6973.073\,m$$

$$X_{1004} = X_{1226} + q \cdot d_4 \cdot \cos\theta_{1226-1004} =$$
$$= 4590.326 + 0.999998673 * 1425.121 * \cos(121.8747) = 4110.224\,m$$
$$Y_{1004} = Y_{1226} + q \cdot d_4 \cdot \sin\theta_{1226-1004} = \quad (3.494)$$
$$= 45954.150 + 0.999998673 * 1425.121 * \sin(121.8747) = 7295.965\,m$$

$$X_{1003}=4940.382\ m \qquad Y_{1003}=6973.073\ m \quad (3.495)$$
$$X_{1004}=4110.224\ m \qquad Y_{1004}=7295.965\ m$$

f. Verificarea calculelor:

$$d_2^{mas} = \frac{D_{1003-73}^{coord}}{q} = 1290.887m$$
$$d_3^{mas} = \frac{D_{1003-1004}^{coord}}{q} = 890.743m \quad (3.496)$$

3.7. *OBSERVAȚII ASUPRA INTERSECȚIILOR*

Metoda folosită pentru determinarea coordonatelor punctelor de îndesire în cazul unei triangulații locale este la latitudinea executantului. Fiecare dintre metodele de îndesire prezentate au avantaje şi dezavantaje. Trebuiesc, totuşi, făcute unele observații generale cum ar fi:

1. toate punctele inaccesibile precum: semnalele cu arbori, tunuri, paratrăsnete, antene GSM, etc., vor fi determinate prin procedeul intersecției înainte;
2. dacă într-o regiune punctele de sprijin, spre care există vizibilitate, sunt puncte inaccesibile sau greu accesibile, determinarea punctelor noi se face prin procedeul intersecției înapoi;
3. procedeul intersecției înainte este preferat din cauza facilității calculelor;
4. procedeul intersecției înapoi este preferat din cauza uşurinței cu care sunt culese datele din teren;
5. procedeul intersecției înainte prezintă avantaje pentru punctele care trebuiesc determinate, măsurătorile efectuându-se concomitent cu măsurarea direcțiilor pentru realizarea rețelei propriu-zise;
6. procedeul intersecției înapoi prezintă avantaje pentru punctele care trebuiesc determinate, după realizarea rețelei de triangulație locală şi numai dacă punctele sunt staționabile;
7. procedeul intersecției laterală se recomandă să fie aplicată atunci când dorim ca determinarea să fie făcută cu un spor de precizie;
8. procedeul intersecției liniare se foloseşte când nu avem la dispoziție un instrument cu care să măsurăm direcțiile, avem însă la dispoziție un instrument pentru măsurarea lungimilor.

3.8. *CÂTEVA ASPECTE PRIVIND PRECIZIA INTERIOARĂ ŞI EXTERIOARĂ ÎN REȚELELE DE SPRIJIN*

Eroarea medie a punctelor "m_p" este adesea preferată în prelucrările geodezice, întrucât exprimă precizia de determinare a unui punct printr-un număr şi spre deosebire de erorile medii ale coordonatelor "m_X" şi "m_Y" este univocă, fiind invariabilă la transformări (invariant al matricii de covarianță). În cazul prelucrării măsurătorilor prin metoda observațiilor indirecte, eroarea

medie a punctelor, se obține relativ ușor, întrucât coeficienții de pondere a punctelor noi, rezultă oricum pe diagonala principală a inversei matricii sistemului normal:

$$\begin{aligned} m_{Xi} &= m_0\sqrt{q_{XiXi}} \\ m_{Yi} &= m_0\sqrt{q_{YiYi}} \\ m_{Hi} &= m_0\sqrt{q_{ii}} \end{aligned} \qquad (3.497)$$

$$m_{Pi} = m_0\sqrt{q_{XiXi} + q_{YiYi}} = \sqrt{m_{Xi}^2 + m_{Yi}^2} \qquad (3.498)$$

Majoritatea rețelelor locale, sunt în prezent prelucrate ca rețele libere fiecare punct din rețea fiind considerat punct nou. Calculându-se erorile medii ale punctelor din rețeaua liberă, acestea sunt semnificativ mai mici decât cele dintr-o rețea constrânsă cu aceeași configurație. Este interesant de urmărit faptul că erorile medii ale punctelor cresc atunci când se reduce numărul punctelor de constrângere, iar când dispare orice constrângere în rețea acestea devin brusc semnificativ mai mici. Explicația acestui fenomen, conduce la întrebarea: care este semnificația geometrică a erorilor medii ale punctelor în rețele legate și libere?

3.8.1. Semnificația geometrică a erorii medii a unui punct într-o rețea constrânsă

1. Rețele de nivelment

Eroarea medie a altitudinii m_{Hi} a unui punct nou este egală cu eroarea medie a diferenței de nivel dintre punctul nou și un punct vechi P.

$$\Delta H_i = H_i - H_{RN} \qquad (3.499)$$

$$m_{\Delta Hi} = m_{Hi} \qquad (3.500)$$

2. Rețele planimetrice

În rețelele planimetrice constrânse, pentru eroarea medie m_{Pi} a unui punct nou P_i de coordonate X_i și Y_i se pot da două explicații:

a. Prima rezultă din creșterile de coordonate

$$\begin{aligned} \Delta X_{A,i} &= X_i - X_A \\ \Delta Y_{A,i} &= Y_i - Y_A \end{aligned} \qquad (3.501)$$

conform legii de propagare a erorilor obținem:

$$m_{\Delta XA,i} = m_{Xi}$$
$$m_{\Delta YA,i} = m_{Yi} \qquad (3.502)$$

și cu aceasta avem:

$$m_{Pi} = \sqrt{m^2_{\Delta X_{A,i}} + m^2_{\Delta Y_{A,i}}} = \sqrt{m^2_{X_i} + m^2_{Y_i}} \qquad (3.503)$$

Rezultă din relațiile (3.503) că eroarea medie a unui punct nou m_{Pi} este egală cu radicalul sumei erorilor medii pătratice a diferențelor de coordonate între punctul nou P_i și un punct vechi oarecare.

b. Considerând acum legătura între punctul vechi și punctul nou exprimat prin coordonatele polare $D_{A,i}$ și $\theta_{A,i}$ (fig. 3.54),

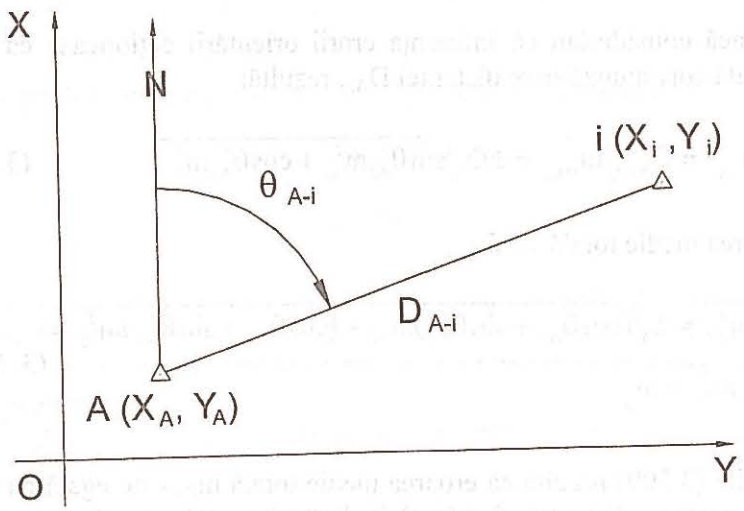


Figura 3.54
Coordonate polare

$$D_{A,i} = \sqrt{(X_i - X_A)^2 + (Y_i - Y_A)^2} \qquad (3.504)$$

$$\theta_{A,i} = \operatorname{arctg}\frac{Y_i - Y_A}{X_i - X_A} \qquad (3.505)$$

rezultă prin aplicarea legii de propagare a erorilor:

$$m^2_{\Delta_{A,i}} = \left(\frac{X_i - X_A}{D_{A,i}}\right)^2 m^2_{X,i} + \left(\frac{Y_i - Y_A}{D_{A,i}}\right)^2 m^2_{Y,i} = \cos^2\theta_{A,i} m^2_{Xi} + \sin^2\theta_{A,i} m^2_{Yi} \quad (3.506)$$

$$m^2_{\Theta_{A,i}} = \left(-\frac{Y_i - Y_A}{D_{A,i}}\right)^2 m^2_{X,i} + \left(\frac{X_i - X_A}{D_{A,i}}\right)^2 m^2_{Y,i} = \sin^2\theta_{A,i} m^2_{Xi} + \cos^2\theta_{A,i} m^2_{Yi} \quad (3.507)$$

Dacă considerăm că influența erorii orientării acționează ca o eroare transversală corespunzătoare distanței $D_{A,i}$, rezultă:

$$m_{q_{A,i}} = D_{A,i}\sqrt{m_{\Theta_{A,i}}} = \pm D\sqrt{\sin\theta^2_{A,i} m^2_{X_i} + \cos\theta^2_{A,i} m^2_{Y_i}} \quad (3.508)$$

Deci eroarea medie totală va fi:

$$\sqrt{m^2_{\Delta_{A,i}} + q^2_{A,i}} = \pm\sqrt{(\cos\theta^2_{A,i} + \sin\theta^2_{A,i}) m^2_{X_i} + (\cos\theta^2_{A,i} + \sin\theta^2_{A,i}) m^2_{Y_i}} = \sqrt{m^2_{X_i} + m^2_{Y_i}} = m_{P_i} \quad (3.509)$$

Din relațiile (3.509) rezultă că eroarea medie totală $m_{P,i}$ este egală cu radicalul din suma erorilor distanței și orientării dintre punctul nou și un punct vechi oarecare.

3.8.2. Semnificația geometrică a erorii medii a unui punct într-o rețea liberă

1. Rețele de nivelment

Semnificația geometrică de la punctul 1 nu se mai poate folosi neavând puncte vechi. Dacă calculăm însă diferența de nivel între un punct nou și altitudinea medie a tuturor punctelor din rețea (centrul de greutate a

altitudinilor), atunci obținem în cazul unei rețele cu n_p puncte noi:

$$\Delta H_{Bi} = H_i - \frac{H_1 + H_2 + ... + H_{np}}{np} = \frac{np-1}{np} H_i - \frac{1}{np} \sum_{i=2}^{np} H_i \qquad (3.510)$$

$$q_{\Delta H_{IB}\Delta H_{IB}} = \left(\frac{n_p - 1}{n_p}\right)^2 q_{H_{IB}H_{IB}} - 2\frac{n_p - 1}{n_p^2} q_{H_IH_I} .... - 2\frac{n_p - 1}{n_p^2} q_{H_IH_{np}} + \qquad (3.511)$$

$$+ \frac{1}{n_p^2} q_{H_IH_2} + ...2\frac{1}{n_p^2} q_{H_IH_{np}} + \frac{1}{n_p^2} q_{H_{np}H_{np}}$$

sau grupând convenabil termenii:

$$q_{\Delta H_{IB}\Delta H_{IB}} = q_{H_IH_I} - \frac{2n_p - 1}{n_p^2}(q_{H_IH_I} + q_{H_2H_2} + ... + q_{H_IH_{np}}) + \qquad (3.512)$$

$$+ \frac{1}{n_p^2}(q_{H_IH_2} + q_{H_2H_2} + ... + q_{H_{np}H_2}) + \frac{1}{n_p^2}(q_{H_IH_{np}} + q_{H_2H_{np}} + q_{H_{np}H_{np}})$$

În cazul rețelelor libere parantezele sunt egale cu zero, rezultă deci:

$$q_{\Delta H_I \Delta H_I} = q_{H_IH_I}$$
$$m_{\Delta H_I \Delta H_I} = m_{H_I} \qquad (3.513)$$

Din relațiile (3.513) rezultă că eroarea medie a altitudinii unui punct nou m_{Hi} într-o rețea liberă, este egală cu eroarea medie a diferenței de nivel între punctul respectiv și centrul de greutate (cota medie) a tuturor punctelor din rețea.

2. Rețea planimetrică

Urmărind raționamentul de mai sus, se obține asemănător:

$$q_{\Delta X_{IB}\Delta X_{IB}} = q_{X_IX_I}$$
$$q_{\Delta Y_{IB}\Delta Y_{IB}} = q_{Y_IY_I} \qquad (3.514)$$

și deci :

$$m_{\Delta X_{IB}} = m_{X_I}$$
$$m_{\Delta Y_{IB}} = m_{Y_I} \qquad (3.515)$$

$$m_{Pi} = \pm\sqrt{m^2_{\Delta X_{iB}} + m^2_{\Delta Y_{iB}}} = \pm\sqrt{m_X^2 + m_Y^2} \qquad (3.516)$$

sau folosindu-ne de forma de exprimare prin coordonate polare.

$$\pm\sqrt{m_{s_i}^2 + m_{\theta i}^2} = \pm m_0\sqrt{(\cos\theta_i^2 + \sin\theta_i^2)Q_{X_iX_i} + (\cos\theta_i^2 + \sin\theta_i^2)Q_{Y_iY_i}} = \quad (3.517)$$
$$= \pm m_0\sqrt{q_{X_iX_i} + q_{Y_iY_i}} = m_{Pi}$$

Conform relației (3.517) într-o rețea planimetrică liberă, eroarea medie m_{Pi} a unui punct este egală cu radicalul sumei pătratelor erorilor medii a creșterilor de coordonate între punctul considerat și centrul de greutate al rețelei, sau cu radicalul sumei pătratelor erorilor distanței și a orientării dintre punctul considerat P_i și centrul de greutate.

3.8.3. Concluzii

1. Eroarea medie totală a unui punct $m_{H_i} = m_0\sqrt{q_{ii}}$ pentru nivelment și $m_{P_i} = m_0\sqrt{q_{X_iX_i} + q_{Y_iY_i}}$ în plan are semnificații total diferite în rețele constrânse și rețele libere, deși forma de exprimare este aceeași.
2. În rețelele cu aceeași configurație, dar prelucrate ca rețea constrânsă și liberă, comparații între erorile medii totale nu au sens, ele având semnificații geometrice diferite.
3. Pentru a scoate în evidență această deosebire, m_P este denumit în rețele constrânse "eroarea medie exterioară a punctelor", iar în rețele libere "eroarea medie interioară a punctelor".
4. Pe lângă preciziile totale ale punctelor, în rețele locale adesea se mai prezintă și precizia întregii rețele. Pentru aceasta se folosește media pătratică a tuturor erorilor punctelor n_P din rețea:

$$m_R = \sqrt{\frac{1}{n_P}\sum m_P^2} = m_0\sqrt{\frac{1}{n_P}\sum(Q_{XX} + Q_{YY})} \quad (3.518)$$

5. În rețele constrânse aceasta se numește "eroarea medie exterioară a rețelei", iar în rețele libere" eroarea medie interioară a rețelei" . Comparații între aceste două mărimi nu au sens, ele referindu-se la semnificațiile geometrice total diferite.

3.8.4. Rețele locale cu configurații speciale și criterii de apreciere a acestora

Pentru a evita paralelisme în activitățile geodezice și pentru reducerea costurilor la crearea rețelelor de sprijin locale, se caută, să se asigure toate cerințele cu o singură rețea de sprijin. La realizarea rețelelor de sprijin locale de

cele mai multe ori se urmăreşte ridicarea zonei de interes, ulterior trasarea unor axe spaţiale din punctele reţelei şi în final chiar urmărirea comportării ei în timp. Axele ce urmează să fie trasate, sunt descrise de o serie de puncte prin coordonatele lor plane şi altitudinile corespunzătoare. Reţelele destinate trasării anumitor obiective trebuie să fie astfel create, încât să permită asigurarea unor precizii aprioric impuse pentru construcţia respectivă.

În practică nu se lucrează tridimensional ci se face în continuare o separare între poziţia planimetrică şi altimetrică. Reţelele planimetrice sunt de regulă reţele locale de triangulaţie, trilateraţie sau eterogene, a căror configuraţie este adaptată formei obiectivului. În multe situaţii datorită formei liniare alungite a unor obiective (poduri, tunele, ape curgătoare, căi de comunicaţii, etc.) rezultă reţele întinse şi destul de înguste. În general o astfel de reţea nu este deosebit de favorabilă din punct de vedere al teoriei erorilor. O mare cantitate de puncte se află la marginea reţelei, unde, după cum este cunoscut precizia şi încrederea scad mult. Din acest motiv, se tinde ca reţelele să fie formate pe cât posibil din cel puţin două lanţuri alăturate.

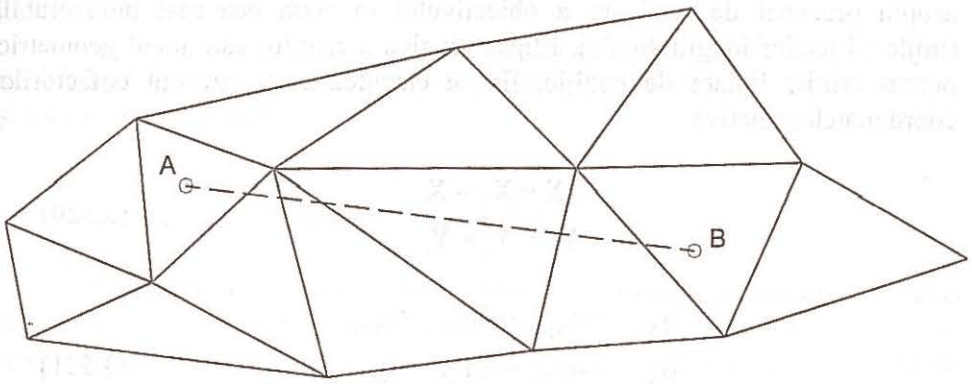


Figura 3.55

Este de dorit ca punctele care se află la capetele axelor să nu cadă niciodată în zone marginale. Fiind reţele cu laturi relativ scurte, apar diferite avantaje:

1. există posibilitatea ca vizele între puncte să fie cât mai bine distribuite, cu numeroase măsurători suplimentare, care permit controlul acestora;
2. greşeli în observaţii pot fi practic uşor depistate;
3. vizele fiind scurte se reduc substanţial erorile datorită factorilor atmosferici respectiv a refracţiei (cea mai periculoasă);
4. nu este necesară procurarea unei aparaturi foarte precise de măsurare. Tahimetrele electronice şi staţiile totale asigurând un flux continuu al datelor de la măsurare la prelucrare.

3.8.5. Criterii de apreciere a configurației rețelei la proiectare

Criteriile de precizie pentru o rețea locală, derivă din precizia de realizare a construcției. La construcții de formă alungită, apar cele mai multe probleme, precizia care trebuie realizată este dată de:

$$\sigma_R = \pm\sigma\sqrt{D_{km}} \tag{3.519}$$

unde:
D- lungimea construcției (axei);
σ- abaterea standard impusă pentru axele construcției;

Această cerință exprimată prin relația de mai sus, trebuie să fie invariantă față de datele geodezice de referință.

Eroarea de la mijlocul axelor longitudinale trebuie să fie dedusă din elementele elipselor erorilor relative. Această elipsă relativă poartă informații asupra preciziei de realizare a obiectivului în zona cea mai nefavorabilă (mijlocul axelor longitudinale). Elipsa relativă a erorilor este locul geometric, pentru erorile liniare de poziție. Ea se calculează cu ajutorul cofactorilor coordonatelor relative.

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_2 - X_1 \\ \Delta Y &= Y_2 - Y_1 \end{aligned} \tag{3.520}$$

$$\begin{aligned} q_{\Delta X\Delta X} &= q_{X_2X_2} - 2q_{X_1X_2} + q_{X_1X_1} \\ q_{\Delta Y\Delta Y} &= q_{Y_2Y_2} - 2q_{Y_1Y_2} + q_{Y_1Y_1} \\ q_{\Delta X\Delta Y} &= q_{X_2Y_2} - q_{X_2X_1} - q_{X_1X_2} + q_{X_1Y_1} \end{aligned} \tag{3.521}$$

Pentru axele A, B și orientarea θ a elipsei avem:

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{m_0^2}{2}(q_{\Delta X\Delta X} + q_{\Delta Y\Delta Y} - \omega) \\ B^2 &= \frac{m_0^2}{2}(q_{\Delta X\Delta X} + q_{\Delta Y\Delta Y} - \omega) \\ \operatorname{tg}2\theta &= \frac{2q_{\Delta X\Delta Y}}{q_{\Delta X\Delta Y} - q_{\Delta Y\Delta Y}} \end{aligned} \tag{3.522}$$

unde:

$$\omega = (q_{\Delta X \Delta X} - q_{\Delta Y \Delta Y})^2 + 4q^2_{\Delta X \Delta Y} \qquad (3.523)$$

Elipsa relativă există independent de distanța dintre două puncte, deci și pentru două puncte cu distanța între ele egală cu zero.

Folosirea pentru realizarea rețelei de trasare a unui obiectiv, se poate deduce eroarea la mijlocul axelor longitudinale:

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= A^2 \sin^2(t-\theta) + B^2 \cos^2(t-\theta) \text{ transversal} \\ \sigma_L^2 &= A^2 \cos^2(t-\theta) + B^2 \sin^2(t-\theta) \text{ longitudinal} \end{aligned} \qquad (3.524)$$

cu t – orientarea axului obiectivului.

Elipsa relativă a erorilor pentru distanță egală cu zero (D_1D_2=0) este invariantă față de datele de referință ale rețelei. Acest lucru nu este valabil pentru punctele de capăt ale unei distanțe. În această situație elipsa relativă a erorilor este dependentă de orientarea axei.

În situația în care σ_T^2 și σ_L^2 depășesc σ_R , trebuie studiată configurația rețelei locale pentru reproiectarea poziției unor puncte din care se fac trasările și reluată întreaga analiză.

3.8.5.1. Criteriul "încrederea"

Toate măsurătorile și calculele într-o rețea trebuie astfel efectuate încât valorile obținute pentru poziția punctelor să fie de încredere (controlate dacă sunt afectate de valori externe). Pentru evitarea valorilor externe în setul de observații, încă din faza de teren se asigură următoarele măsuri pentru evitarea acestora:

1. măsurători de control;
2. transferul controlat al datelor;
3. automatizarea fluxului de date;
4. utilizarea unor programe verificate care asigură controale intermediare.

Parametrii cei mai importanți pentru analiza " încrederii" sunt:

1. contributul la redundanță (contributul fiecărei măsurători în parte la totalul supradeterminărilor în rețea);
2. încrederea interioară a valorilor măsurate (posibilitatea de control a valorilor măsurate);
3. încrederea exterioară a coordonatelor (influența maximă a valorii externe nedepistate asupra coordonatelor).

3.8.5.2. Contributul la redundanța r_i

Numărul supradeterminărilor într-o rețea se distribuie asupra tuturor măsurătorilor. Contributul la redundanță pentru o măsurătoare depinde de precizia ei și de legăturile geometrice din vecinătatea valorii măsurate. El se calculează cu relația:

$$r_i = Q_{v_i v_i} p_{ii} = 1 - \frac{m_0^2(T_i)}{m_0^2(L_i)} \qquad (3.525)$$

unde:

$Q_{v_i v_i}$ -cofactorul corecției măsurătorii L_i;

p_{ii}- ponderea observației L_i;

$m_0^2(T_i)$- abaterea standard a valorii măsurate după compensare (a posteriorii);

$m_0^2(L_i)$- abaterea standard a lui (L_i) înainte de compensare (a priorii).

Contributul la redundanță are următoarea semnificație:

1. ce contribut are o măsurătoare la redundanța totală;
2. cu ce expresivitate se răsfrânge o eroare din măsurătoarea respectivă, asupra corecției sale.

R_i este adimensional și este mereu cuprins în intervalul (0,1), "0" înseamnă că nu există supradeterminare pentru calcularea unui punct, iar "1" înseamnă că punctul este 100% supradeterminat și măsurătoarea redundantă nu contribuie cu nimic la determinarea punctului.

Din valoarea contributului la redundanță se poate afla: câte părți dintr-o eventuală eroare se răsfrâng în corecția măsurătorii respective. Cu cât r_i este mai mare, cu atât și o eroare se va răsfrânge mai puternic în corecția corespunzătoare. Pentru a asigura valori r_i cât mai bune (0.3-0.6) este necesar ca în rețea să se asigure măsurători suplimentare independente.

3.8.5.3. Încrederea interioară

Încrederea interioară cuprinde așa numitele procedee și tehnici de depistare a erorilor mari.

Controlul reciproc al măsurătorilor se face prin teste statistice. Testarea se face cu valorile corecțiilor v_i, cu relația:

$$NV_i = \frac{|v_i|}{m_0(v_i)} = \frac{|v_i|}{m_0(L_i) r_i^{\frac{1}{2}}} \qquad (3.526)$$

care se pretinde a avea o distribuție normală, și care devine mărimea de testat (statistică).

Pentru a depista o valoare externă se calculează ∇L_i, care depinde de datele inițiale ale testului, de precizia de măsurare și de contributul de redundanță.

$$\nabla L_i = \frac{VLDS}{\sqrt{r_i}} m_0(L_i) \qquad (3.527)$$

Ea se compară cu VLDS, valoarea limită pentru "data snooping". Pentru rețele planimetrice de ridicare VLDS este luat de regulă 3.6. Dacă NV_i>VLDS atunci acea măsurătoare se bănuiește a fi afectată de o valoare externă.

Erori mari (valori externe) care sunt mai mici decât ∇L_i nu mai pot fi depistate. ∇L_i fiind dependent de contributul de redundanță, este bine ca r_i să fie cât mai mare pentru a obține valori ∇L_i cât mai mici.

Exemplu:

$$\nabla L_i = \frac{3.6}{\sqrt{r_i}} 0.7 \qquad (3.528)$$

- pentru un set de direcții măsurate rezultă:

Tabel 3-64

r_i	∇L_i
0.06	102.9
0.08	89.1
0.1	79.7
0.3	46.0
0.5	36.1
0.8	28.2
1.0	25.2

4. TRANSMITEREA LA SOL A PUNCTELOR DE TRIANGULAȚIE ȘI ÎNDESIRE

4.1. TRANSMITEREA LA SOL, CAZUL CÂND PUNCTUL ESTE STAȚIONABIL

1. Date inițiale:

Punctul P este de cordonate cunoscute (x, y) situat pe terasa unei clădiri. Avem posibilitatea să staționăm cu instrumente de măsurat direcții în acest punct. La nivelul solului alegem punctele1, 2 și 3 (fig. 4.1) astfel încât ele să formeze cu punctul P două triunghiuri aproximativ echilaterale. Punctele 1, 2 și 3 se materializează la nivelul solului prin borne de beton armat.

Din punctul P, de pe terasa clădirii trebuie să existe vizibilitate spre cele trei puncte bornate la sol (1, 2, 3) și spre cel puțin două puncte vechi de coordonate cunoscute din rețeaua de triangulație locală (T_1 și T_2 din fig. 4.1).

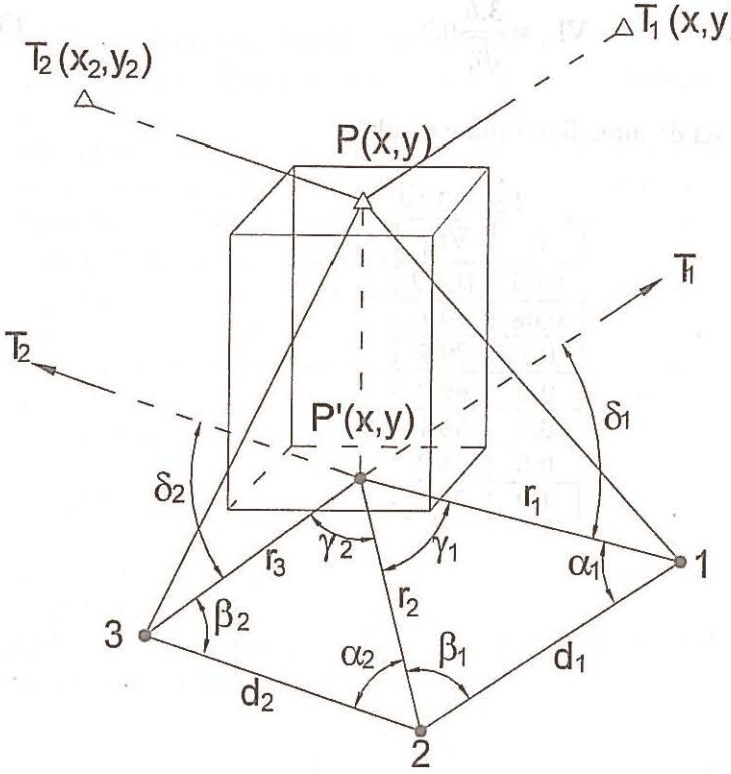


Figura 4.1
Transmiterea la sol. Cazul când punctul este staționabil

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie şi metode adecvate triangulaţiei pentru măsurarea direcţiilor din punctul P către punctele vechi şi către punctele noi situate la nivelul solului. Se staţionează de asemenea şi în punctele noi 1, 2 şi 3 din care sunt măsurate direcţiile spre celelalte puncte de la sol şi spre punctul vechi P.

Cu ajutorul acestor direcţii se determină unghiurile α_i, β_i, γi, δ_i cu i=1,2.

Sunt măsurate cu precizie ridicată laturile d_1 şi d_2 dintre punctele 1–2, respectiv 2-3, sunt determinate elementele necesare aplicării corecţiilor de la măsurarea directă a lungimilor pentru aceste laturi.

Dorim ca pe baza măsurătorilor efectuate şi a coordonatelor punctelor vechi să determinăm coordonate pentru punctele 1, 2 şi 3 situate la sol.

3. Etape de calcul:

a. Se determină valorile orizontale pentru distanţele d_1 şi d_2 prin aplicarea tuturor corecţiilor (tensiune, etalonare, temperatură şi reducere la orizont).

Dacă se lucrează în sistemul de coordonate geodezice se vor aplica distanţelor d_1 şi d_2 corecţiile de reducere la nivelul mării şi corecţiile prin care să se ţină seama de deformaţiile cauzate de sistemul de proiecţie adoptat.

b. Unghiurile α_i, β_i, γi, δ_i se compensează respectând condiţia de sumă a unghiurilor într-un triunghi astfel:

Pentru triunghiul P'-1-2 avem:

$$\alpha_1' + \beta_1' + \gamma_1' - 200^G = W_1 \qquad (4.1)$$

în care: $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1'$ sunt unghiurile rezultate din direcţiile măsurate pe teren şi compensate în staţie, iar W_1 reprezintă neînchiderea în acest triunghi

Unghiurile compensate vor fi calculate cu relaţiile (4.2.)

$$\alpha_1 = \alpha_1' + \frac{W_1}{3}$$

$$\beta_1 = \beta_1' + \frac{W_1}{3} \qquad (4.2)$$

$$\gamma_1 = \gamma_1' + \frac{W_1}{3}$$

Pentru triunghiul P'-2-3 avem:

$$\alpha_2' + \beta_2' + \gamma_2' - 200^G = W_2 \qquad (4.3)$$

în care: $\alpha_2', \beta_2', \gamma_2'$ sunt unghiurile rezultate din direcțiile măsurate pe teren compensate în stație, iar W_1 reprezintă neînchiderea în acest triunghi. Unghiurile compensate vor fi calculate cu relațiile (4.4).

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_2' + \frac{W_2}{3} \\ \beta_2 &= \beta_2' + \frac{W_2}{3} \\ \gamma_2 &= \gamma_2' + \frac{W_2}{3} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Controlul compensărilor constă în îndeplinirea condițiilor (4.5):

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 200^G \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 200^G \end{aligned} \tag{4.5}$$

c. Calculul orientărilor θ_{PT1} θ_{PT2}

$$\begin{aligned} \theta_{P-T1} &= \text{arctg}\frac{\Delta Y_{P-T1}}{\Delta X_{P-T1}} = \text{arctg}\frac{Y_{T_1} - Y_P}{X_{T_1} - X_P} \\ \theta_{P-T2} &= \text{arctg}\frac{\Delta Y_{P-T2}}{\Delta X_{P-T2}} = \text{arctg}\frac{Y_{T_2} - Y_P}{X_{T_2} - X_P} \end{aligned} \tag{4.6}$$

d. Calculul orientărilor laturilor triunghiurilor I și II pentru latura P-1

$$\begin{aligned} \theta_{P-1}' &= \theta_{P-T1} + \delta_1 \\ \theta_{P-1}'' &= \theta_{P-T2} - (\delta_2 + \gamma_2 + \gamma_1) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Trebuie îndeplinită condiția de toleranță $\left|\theta_{P-1}' - \theta_{P-1}''\right| = T_\theta$.

Valoarea probabilă pentru θ_{P-1} se calculează cu relația:

$$\theta_{P-1} = \frac{\theta_{P-1}' + \theta_{P-1}''}{2} \tag{4.8}$$

sau

$$\theta_{P-1} = \frac{\theta'_{P-1} * N_1 + \theta''_{P-2} * N_2}{N_1 + N_2} \qquad (4.9)$$

în care N_1 şi N_2 sunt ponderile ce se calculează cu relaţiile:

$$\begin{aligned} N_1 &= (D_{P-1})_{km} \\ N_2 &= (D_{P-2})_{km} \end{aligned} \qquad (4.10)$$

În mod asemănător sunt determinate orientările tuturor laturilor triunghiurilor P'-1-2 şi P'-2-3

e. Calculul lungimilor r_1, r_2, r_3

în triunghiul P'-1-2 aplicăm teorema sinusurilor

$$M_1 = \frac{d_1}{\sin\gamma_1} = \frac{r_1}{\sin\beta_1} = \frac{r'_2}{\sin\alpha_1} \qquad (4.11)$$

unde M_1 este modulul acestui triunghi

$$\begin{aligned} r_1 &= M_1 \sin\beta_1 \\ r_2 &= M_1 \sin\alpha_1 \end{aligned} \qquad (4.12)$$

în triunghiul P'-2-3 aplicăm teorema sinusurilor

$$M_2 = \frac{d_2}{\sin\gamma_2} = \frac{r_3}{\sin\alpha_2} = \frac{r''_2}{\sin\beta_2} \qquad (4.13)$$

M_2 este modulul acestui triunghi

$$\begin{aligned} r_3 &= M_2 \sin\alpha_2 \\ r''_2 &= M_2 \sin\beta_2 \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Deoarece latura r_2 a fost calculată din cele 2 triunghiuri va trebui îndeplinită condiţia de toleranţă pentru aceste distanţe:

$$\left| r''_2 - r'_2 \right| \le T_d \qquad (4.15)$$

f. Calculul coordonatelor punctelor 1, 2 şi 3 de la sol

f1. Calculul coordonatelor ca puncte radiate din punctul P

$$X_i = X + r_i \cos\theta_{P-i}$$
$$Y_i = Y + r_i \sin\theta_{P-i} \qquad (4.16)$$

La acest procedeu controlul determinărilor constă în calculul lungimil d_1 şi d_2 din coordonatele punctelor 1, 2 şi 3 calculate, lungimi care vor comparate cu valorile corespunzătoare măsurate şi corectate

$$d_{ij}^{calc} = \sqrt{\Delta X_{ij}^2 + \Delta Y_{ij}^2} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \qquad (4.17)$$

control

$$\left| d_{ij}^{calc} - d_{ij}^{initial} \right| \le T_d \qquad (4.18)$$

f2. Coordonatele punctelor 1, 2 şi 3 de la sol pot fi calculate şi prin drumuir închisă pe punctul de plecare pe traseul P′-1-2-3-P′ fiind necesar ca în prealabi să determinăm orientările acestor laturi. Se face compensarea corespunzător p orientări şi pe coordonate.

Dacă dorim să determinăm şi cote pentru punctele 1, 2 şi 3, aceast cerinţă va fi realizată prin nivelment geometric, prin transmiterea cotelor de l un reper din apropiere sau prin nivelment trigonometric din punctul P în funcţi de altitudinea punctului P, de unghiurile verticale măsurate şi de distanţele de l punctul P la punctele de la sol 1, 2 şi 3.

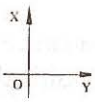
4.1.1. Exemplu. Transmiterea la sol a coordonatelo punctelor. Punctul de triangulaţie este situat l înălţime şi este staţionabil.

1. Elemente iniţiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 59, 77, 55, Sistem de proiecţie "LOCAL"

Tabelul 4-1

Pct	X [m]	Y [m]
59	9507,900	8704,780
77	7006,267	8873,495
55	10133,121	6959,121



2. Schița vizelor

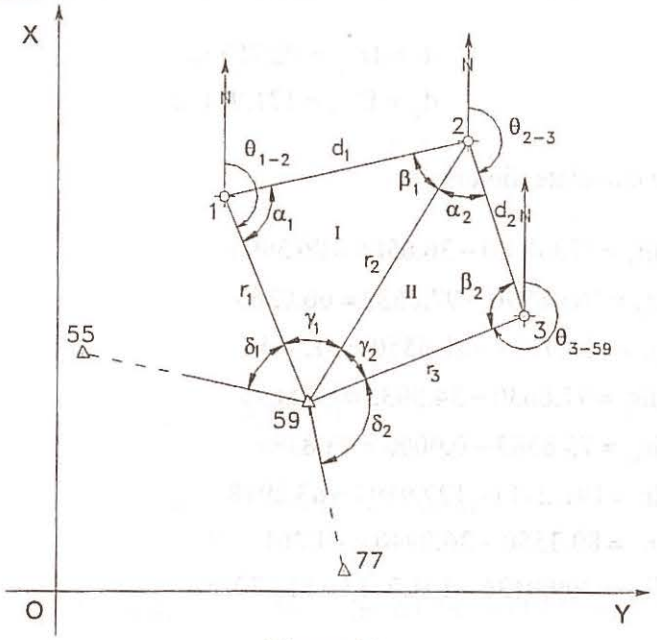


Figura 4.2
Transmiterea la sol a coordonatelor punctului staționabil 59

3. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stație, centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabelul 4-2

PS	PV	Direcții măsurate [g,c,cc]
59	77	309,9136
	55	36,0940
	1	80,3550
	2	127,9193
	3	191,2111
1	59	123,0580
	2	36,6585
2	3	34,9935
	59	97,8630
	1	163,8996
3	59	0,0000
	2	73,8383

$$d_1 = D_{1\text{-}2} = 92.755 \text{ m}$$
$$d_2 = D_{2\text{-}3} = 121.981 \text{ m}$$

4. Unghiurile calculate din direcții

$$\begin{aligned}
\alpha_1' &= dir_{59} - dir_2 = 123.0580 - 36.6585 = 86.3995 \\
\beta_1' &= dir_1 - dir_{59} = 163.8996 - 97.8630 = 66.0366 \\
\gamma_1' &= dir_2 - dir_1 = 127.9193 - 80.3550 = 47.5643 \\
\alpha_2' &= dir_{59} - dir_3 = 97.8630 - 34.9935 = 62.8695 \\
\beta_2' &= dir_2 - dir_{59} = 73.8383 - 0.0000 = 73.8383 \\
\gamma_2' &= dir_3 - dir_2 = 191.2111 - 127.9193 = 63.2918 \\
\delta_1 &= dir_1 - dir_{55} = 80.3550 - 36.0940 = 44.261 \\
\delta_2 &= dir_{77} - dir_3 = 309.9136 - 191.2111 = 118.7025
\end{aligned} \tag{4.19}$$

5. Etape de calcul

a. Compensarea unghiurilor $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$

a1. în triunghiul I

$$\begin{aligned}
&\alpha_1' + \beta_1' + \gamma_1' - 200^G = w_1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 86.3995 + 66.0366 + 47.5643 - 200 = 0.0004
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1' - \frac{w_1}{3} = 86.3995 - \frac{0.0004}{3} = 86^G.3993 \\
\beta_1 &= \beta_1' - \frac{w_1}{3} = 66.0366 - \frac{0.0004}{3} = 66^G.0365 \\
\gamma_1 &= \gamma_1' - \frac{w_1}{3} = 475643 - \frac{0.0004}{3} = 47^G.5642
\end{aligned} \tag{4.21}$$

a2. în triunghiul II

$$\begin{aligned}
&\alpha_2' + \beta_2' + \gamma_2' - 200^G = W_2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 62.8695 + 73.8383 + 63.2918 - 200 = -0.0004
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\alpha_2 = \alpha_2' - \frac{w_2}{3} = 62.8695 - \frac{-0.0004}{3} = 62^G.8696$$
$$\beta_2 = \beta_2' - \frac{w_2}{3} = 73.8383 - \frac{-0.0004}{3} = 73^G.8385 \qquad (4.23)$$
$$\gamma_1 = \gamma_2' - \frac{w_2}{3} = 63.2918 - \frac{-0.0004}{3} = 63^G.2919$$

b. Calculul lungimilor laturilor r_1, r_2, r_3

b1. în triunghiul I

$$\frac{d_1}{\sin\gamma_1} = \frac{r_1}{\sin\beta_1} = \frac{r_2}{\sin\alpha_1} \qquad (4.24)$$

$$M_1 = \frac{d_1}{\sin\gamma_1} = \frac{92.755}{\sin 47.5642} = 136.4966 \qquad (4.25)$$

$$r_1 = M_1 \sin\beta_1 = 136.4966 \cdot \sin 66.0365 = 117.528m$$
$$r_2 = M_1 \sin\alpha_1 = 136.4966 \cdot \sin 86.3993 = 133.393m \qquad (4.26)$$

b2. în triunghiul II

$$\frac{d_2}{\sin\gamma_2} = \frac{r_2}{\sin\beta_2} = \frac{r_3}{\sin\alpha_2} \qquad (4.27)$$

$$M_2 = \frac{d_2}{\sin\gamma_2} = \frac{121.981}{\sin 63.2919} = 145.5072 \qquad (4.28)$$

$$r_2 = M_2 \sin\beta_2 = 145.5072 \cdot \sin 73.8385 = 133.393m$$
$$r_3 = M_2 \sin\alpha_2 = 145.5072 \cdot \sin 62.8696 = 121.452m \qquad (4.29)$$

c. Calculul orientărilor de sprijin

$$\theta_{59-i} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{59-i}}{\Delta X_{59-i}} = \text{arctg}\frac{Y_i - Y_{59}}{X_i - X_{59}} \qquad (4.30)$$

$$\theta_{59-77} = \text{arctg}\frac{8873.495 - 8704.780}{7006.267 - 9507.900} = 195^{G}.7130$$
$$\theta_{59-55} = \text{arctg}\frac{6959.121 - 8704.780}{10133.111 - 9507.900} = 321^{G}.8945 \qquad (4.31)$$

d. Calculul orientărilor laturilor triunghiurilor

$$\theta^{I}_{59-1} = \theta_{59-55} + \delta_1 = 321.8945 + 44.2610 = 366^{G}.1555$$
$$\theta^{II}_{59-1} = \theta_{59-77} + (400 - \delta_2 - \gamma_2 - \gamma_1) =$$
$$= 195.7130 + (400 - 118.7025 - 63.2918 - 47.5643) = 366^{G}.1544$$
$$\theta^{med}_{59-1} = \frac{\theta^{I}_{59-1} + \theta^{II}_{59-1}}{2} = \frac{366.1555 + 366.1544}{2} = 366^{G}.1550 \qquad (4.32)$$

$$\theta_{1-2} = \theta_{59-1} - 200 - \alpha_1 = 366.1550 - 200 - 86.3993 = 79^{G}.7557$$
$$\theta_{2-3} = \theta_{1-2} - 200 - \beta_1 - \alpha_2 =$$
$$= 79.7557 - 200 - 66.0365 - 62.8696 = 150^{G}.8496$$
$$\theta_{3-59} = \theta_{59-77} - \delta_2 + 200 = 195.713 - 118.7025 + 200 = 277^{G}.0105$$

e. Calculul coordonatelor punctelor

Calculul coordonatelor punctelor transmise la sol prin drumuire

Tabelul 4-3

De la	La	Distanța D[m]	Orientarea θij	Coord.relative		Coord.absolute		Pct.
				δ_X	δ_Y	X	Y	
59						9507.900	8704.780	59
59	1	117.528	366.155	101.307	-59.580	9609.207	8645.200	1
1	2	92.7550	79.7557	29.001	88.105	9638.208	8733.305	2
2	3	121.981	150.8496	-87.397	85.095	9550.811	8818.400	3
3	59	121.453	277.0105	-42.911	-113.619	9507.900	8704.781	59

$$X_1 = 9609.207\ m \qquad Y_1 = 8645.200\ m$$
$$X_2 = 9638.208\ m \qquad Y_2 = 8733.305\ m \qquad (4.33)$$
$$X_3 = 9550.811\ m \qquad Y_3 = 8818.400\ m$$

f. Controlul calculelor :

$$d_1^{mas} = D_{1-2}^{calc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 92.755 = \sqrt{(8733.305 - 8645.200)^2 + (9638.208 - 9609.207)^2} \Rightarrow \quad (4.34)$$

$$\Rightarrow 92.755 = 92.755$$

$$d_2^{mas} = D_{2-3}^{calc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 121.981 = \sqrt{(8818.400 - 8733.305)^2 + (9550.811 - 9638.208)^2} \Rightarrow \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow 121.981 = 121.981$$

4.2. TRANSMITEREA LA SOL, CAZUL CÂND PUNCTUL ESTE NESTAȚIONABIL

1. Date inițiale:

Punctul P de coordonate cunoscute X și Y este inaccesibil. La nivelul solului alegem punctele 1, 2 și 3 (fig. 4.3) astfel încât ele să formeze cu punctul P două triunghiuri (P-1-2 și P-2-3) aproximativ echilaterale. Punctele 1, 2 și 3 se materializează la nivelul solului prin borne de beton armat. Din punctele 1 și 3 trebuie să existe vizibilitate spre punctele P și 2, iar din punctul 2 va trebui să avem asigurată vizibilitatea și spre punctele T_1 și T_2, vechi, de coordonate cunoscute, marcate, semnalizate, recunoscute și identificate pe teren.

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie și metode adecvate triangulației pentru măsurarea direcțiilor din punctele de la sol 1, 2 și 3 spre punctele noi și spre punctele vechi P, T_1 și T_2. Cu ajutorul acestor direcții compensate în stație se determină unghiurile α_i, β_i, λ_i în care i = 1 și 2.

Sunt măsurate cu precizie ridicată laturile d_1 și d_2 între punctele 1-2 respectiv 2-3, sunt determinate elementele necesare aplicării corecțiilor specifice măsurării directe a lungimilor care se aplică acestor laturi.

Dorim ca pe baza măsurătorilor efectuate și a coordonatelor punctelor vechi să determinăm coordonatele pentru punctele 1, 2 și 3 situate la sol.

3. Etape de calcul

a. Se determină valorile orizontale pentru distanțele d_1 și d_2 prin aplicarea tuturor corecțiilor (tensiune, etalonare, temperatură și reducere la orizont).

Dacă se lucrează în sistem de coordonate geodezice, distanțelor d_1 și d_2 li se vor aplica corecțiile de reducere la nivelul mării, precum și corecțiile prin care să se țină seama de deformațiile cauzate de sistemul de proiecție adoptat.

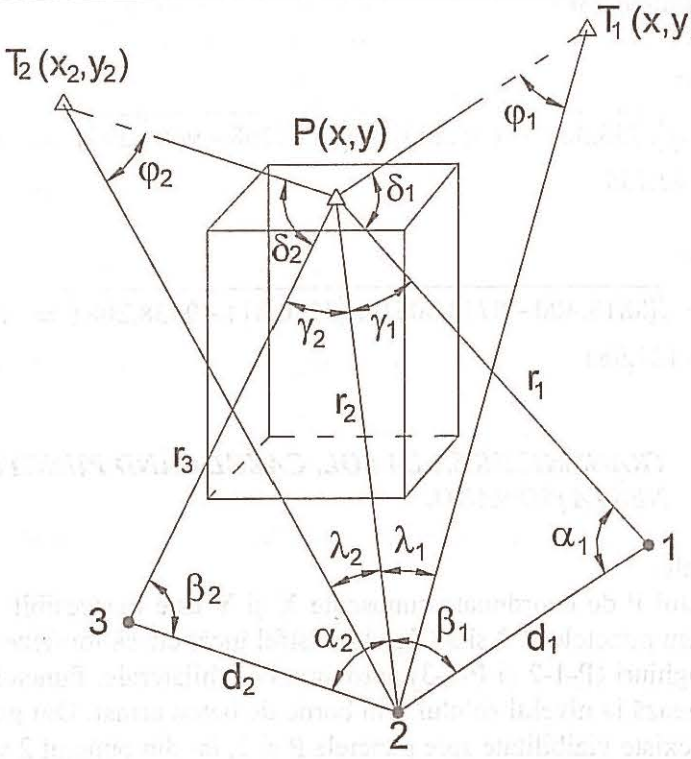


Figura 4.3
Transmiterea la sol. Cazul când punctul este nestaționabil

b. Calculul unghiurilor γ_1 și γ_2 din triunghiurile P-1-2 și P-2-3

$$\gamma_1 = 200^G - (\alpha_1 + \beta_1)$$
$$\gamma_2 = 200^G - (\alpha_2 + \beta_2) \qquad (4.36)$$

c. Calculul distanțelor și orientărilor dintre punctele vechi

$$\theta_{PT1} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{PT1}}{\Delta X_{PT1}} = \text{atctg}\frac{Y_{T1} - Y_P}{X_{T1} - X_P}$$
$$\theta_{PT2} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{PT2}}{\Delta X_{PT2}} = \text{atctg}\frac{Y_{T2} - Y_P}{X_{T2} - X_P} \qquad (4.37)$$

$$D_{P-T1} = \sqrt{\Delta X_{PT1}^2 + \Delta Y_{PT1}^2} = \sqrt{(X_{T1} - X_P)^2 + (Y_{T1} - Y_P)}$$
$$D_{P-T2} = \sqrt{\Delta X_{PT2}^2 + \Delta Y_{PT2}^2} = \sqrt{(X_{T2} - X_P)^2 + (Y_{T2} - Y_P)} \qquad (4.38)$$

d. Calculul laturilor r_1, r_2, r_3

d1. în triunghiul P-1-2 aplicăm teorema sinusurilor

$$M_1 = \frac{d_1}{\sin\gamma_1} = \frac{r_1}{\sin\beta_1} = \frac{r_2'}{\sin\alpha_1} \qquad (4.39)$$

M_1 este modulul specific triunghiului P-1-2

$$\begin{aligned} r_1 &= M_1 \sin\beta_1 \\ r_1' &= M_1 \sin\alpha_1 \end{aligned} \qquad (4.40)$$

d2. în triunghiul P-2-3 aplicăm teorema sinusurilor

$$M_2 = \frac{d_2}{\sin\gamma_2} = \frac{r_3}{\sin\alpha_2} = \frac{r_2''}{\sin\beta_2} \qquad (4.41)$$

M_2 este modulul specific triunghiului P23

$$\begin{aligned} r_3 &= M_2 \sin\alpha_2 \\ r_2'' &= M_2 \sin\beta_2 \end{aligned} \qquad (4.42)$$

Deoarece latura r_2 a fost calculată din cele două triunghiuri, va trebui îndeplinită condiția de toleranță pentru aceste distanțe

$$\left|r_2'' - r_2'\right| \le T_d \qquad (4.43)$$

e. Calculul unghiurilor φ_1 şi φ_2

e1. aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul P-T_1-2

$$\frac{D_{PT1}}{\sin\lambda_1} = \frac{r_2}{\sin\varphi_1} \qquad (4.44)$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{r_2 \sin\lambda_1}{D_{P-T1}} \Rightarrow \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{r_2 \sin\lambda_1}{D_{P-T1}}\right) \qquad (4.45)$$

e2. Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul P-2-T_2

$$\frac{D_{PT2}}{\sin\lambda_2} = \frac{r_2}{\sin\varphi_2} \tag{4.46}$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{r_2 \sin\lambda_{12}}{D_{P-T2}} \Rightarrow \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{r_2 \sin\lambda_2}{D_{P-T2}}\right) \tag{4.47}$$

f. Calculul unghiurilor δ_1 şi δ_2

f1. din triunghiul P-T_1-2

$$\delta_1 = 200 - (\varphi_1 + \lambda_1) \tag{4.48}$$

f2. din triunghiul P-2-T_2

$$\delta_2 = 200 - (\varphi_2 + \lambda_2) \tag{4.49}$$

g. Calculul orientărilor laturilor P-1; P-2 şi P-3

- pentru latura P-1

$$\begin{aligned} \theta'_{P-1} &= \theta_{P-T1} + \delta_1 - \gamma_1 \\ \theta''_{P-1} &= \theta_{P-T2} - \delta_2 - \gamma_1 \end{aligned} \tag{4.50}$$

- trebuie îndeplinită condiția de toleranță:

$$\left|\theta'_{P1} - \theta''_{P1}\right| \le T_\theta \tag{4.51}$$

Valoarea probabilă pentru θ_{P-1} se calculează cu relația (4.52) ca medie estimativă:

$$\theta_{P-1} = \frac{\theta'_{P-1} + \theta''_{P-1}}{2} \tag{4.52}$$

- sau ca medie ponderată:

$$\theta_{P-1} = \frac{\theta'_{P1} * N_1 + \theta''_{P1} * N_2}{N_1 + N_2} \tag{4.53}$$

- în care:

$$\begin{aligned} N_1 &= (D_{P-1})_{km} \\ N_2 &= (D_{P-2})_{km} \end{aligned} \tag{4.54}$$

În mod asemănător sunt determinate orientările laturilor P-2 şi P-3. Orientările vor fi transmise şi pentru laturile 1-2 şi 2-3.

h. Calculul coordonatelor punctelor 1, 2 şi 3 de la sol

h1. Calculul coordonatelor ca puncte radiate din punctul P

$$\begin{aligned} X_i &= X + r_i \cos\theta_{P-i} \\ Y_i &= Y + r_i \sin\theta_{P-i} \end{aligned} \qquad (4.55)$$

h2. Coordonatele punctelor 1, 2 şi 3 de la sol vor fi calculate prin drumuire închisă pe punctul de plecare pe traseul P-1-2-3-P fiind necesar ca în prealabil să determinăm orientările acestor laturi. Se face compensarea drumuirii corespunzător pe orientări şi pe coordonate.

i. Controlul determinărilor

La acest procedeu controlul determinărilor constă în calculul lungimilor d_1 şi d_2 din coordonatele punctelor 1, 2 şi 3 calculate, lungimi comparate apoi cu valorile corespunzătoare măsurate şi corectate.

$$d_{ij}^{calc} = \sqrt{\Delta X_{ij}^2 + \Delta Y_{ij}^2} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \qquad (4.56)$$

- control:

$$\left| d_{ij}^{calc} - d_{ij}^{initial} \right| \le T_d \qquad (4.57)$$

Dacă dorim să determinăm şi cote pentru punctele 1, 2 şi 3, această cerinţă va fi realizată prin nivelment geometric, prin transmiterea cotelor de la un reper din apropiere sau prin nivelment trigonometric din punctul P în funcţie de altitudinea punctului P, de unghiurile verticale măsurate şi de distanţele de la punctul P la punctele de la sol 1, 2 şi 3.

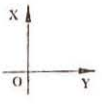
4.2.1. Exemplu. Transmiterea la sol a coordonatelor punctelor. Punctul de triangulaţie este situat la înălţime şi este nestaţionabil.

1. Elemente iniţiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 85, 63, 73,
Sistem de proiecţie "LOCAL"

Tabelul 4-4

Pct	X [m]	Y [m]
85	7536.629	6177.881
63	7794.871	7807.489
73	5902.607	5663.156



2. Schița vizelor

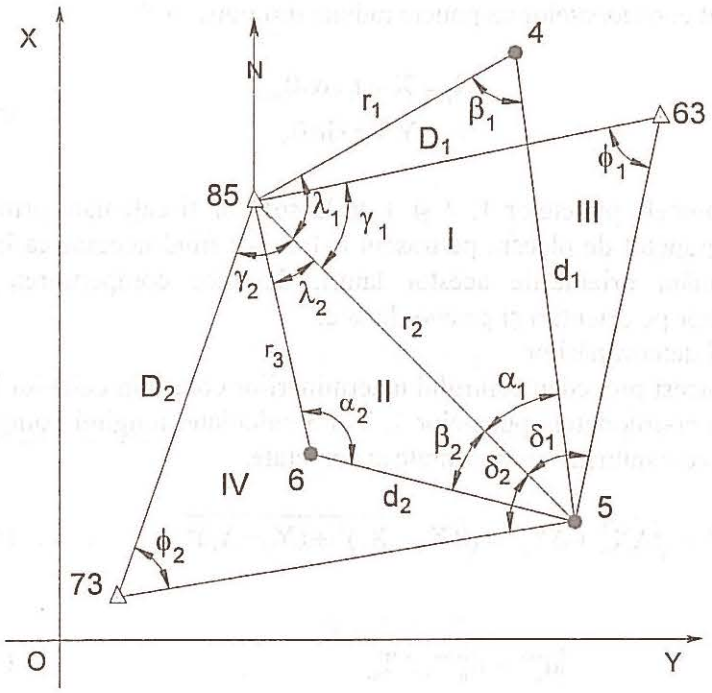


Figura 4.4
Transmiterea la sol a coordonatelor punctului nestaționabil 85

3. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stație, centrate, reduse și reduse la planul de proiecție

Tabelul 4-5

PS	PV	Direcții măsurate [g,c,cc]
4	5	119.3733
	85	194.5792
5	6	371.4386
	85	35.3581
	4	96.2594
	63	183.1732
	73	327.2589
6	85	190.3527
	5	269.0543

Distanțele orizontale măsurate pe teren între punctele de la sol

$$d_1 = D_{4-5} = 204.853\text{m}$$
$$d_2 = D_{5-6} = 186.526\text{m}$$

4. Unghiurile calculate din direcții

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= dir_4 - dir_{85} = 96.2594 - 35.3581 = 60.9013 \\
\beta_1 &= dir_{85} - dir_5 = 194.5792 - 119.3733 = 75.2059 \\
\alpha_2 &= dir_5 - dir_{85} = 269.0543 - 190.3527 = 78.7016 \\
\beta_2 &= dir_{85} - dir_6 = 35.3581 - 371.4386 + 400 = 63.9195 \\
\delta_1 &= dir_{63} - dir_{85} = 183.1732 - 35.3581 = 147.8151 \\
\delta_2 &= dir_{85} - dir_{73} = 35.3581 - 327.2589 + 400 = 108.0992
\end{aligned} \tag{4.58}$$

5. Etape de calcul:

a. Calculul unghiurilor λ_i

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 200 - (\alpha_1 + \beta_1) = 200 - (60.9013 + 75.2059) = 63^G.8928 \\
\lambda_2 &= 200 - (\alpha_2 + \beta_2) = 200 - (78.7016 + 63.9195) = 57^G.3789
\end{aligned} \tag{4.59}$$

b. Calculul lungimilor laturilor r_1, r_2, r_3

b1. În triunghiul 85-4-5:

$$\frac{d_1}{\sin\gamma_1} = \frac{r_1}{\sin\alpha_1} = \frac{r_2}{\sin\beta_1} \tag{4.60}$$

$$M_1 = \frac{d_1}{\sin\gamma_1} = \frac{204.853}{\sin 63.8928} = 242.8825 \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= M_1 * \sin\alpha_1 = 242.8825 * \sin 60.9013 = 198.497\text{m} \\
r_2' &= M_1 * \sin\beta_1 = 242.8825 * \sin 75.2059 = 224.694\text{m}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

b2. În triunghiul 85-6-5:

$$\frac{d_2}{\sin\gamma_2} = \frac{r_3}{\sin\beta_2} = \frac{r_2}{\sin\alpha_2} \tag{4.63}$$

$$M_2 = \frac{d_2}{\sin\gamma_2} = \frac{186.526}{\sin 57.3789} = 237.8740 \qquad (4.64)$$

$$r_2^{"} = M_2 * \sin\alpha_2 = 237.87408 * \sin 78.7016 = 224.685m$$
$$r_3 = M_2 * \sin\beta_2 = 237.8740 * \sin 63.9195 = 200.682m \qquad (4.65)$$

$$r_2 = \frac{r_2^{'} + r_2^{"}}{2} = \frac{224.694 + 224.685}{2} = 224.690\text{m} \qquad (4.66)$$

c. Calculul distanțelor D_1 și D_2

Calculul orientării și distanței între punctele vechi

Tabelul 4-6

Pct	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{55-59} = \frac{\Delta Y_{55-59}}{\Delta X_{55-59}}$	Orientrea $\theta_{55-59} = arctg\frac{\Delta Y_{55-59}}{\Delta X_{55-59}}$ [g c cc]	Distanța $D_{55-59} = \sqrt{(\Delta X_{55-59})^2 + (\Delta Y_{55-59})^2}$ [m]
85	7536.629	6177.881	6.310391	89.9948	1649.943
63	7794.871	7807.489			
Δ	258.242	1629.608			
85	7536.629	6177.881	0.315003	219.4273	1854.242
73	5902.607	5663.159			
Δ	-1634.022	-541.722			

d. Calculul unghiurilor φ_1, φ_2

d1. în triunghiul 85-5-63

$$\frac{D_1}{\sin\delta_1} = \frac{r_2}{\sin\varphi_1} = \frac{D_{63-5}}{\sin\lambda_1} \qquad (4.67)$$

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{r_2}{D_1} * \sin\delta_1\right) = \arcsin\left(\frac{224.690}{1649.943} * \sin 147.8151\right) = 6^G.3475 \qquad (4.68)$$

d2. în triunghiul 85-5-73

$$\frac{D_2}{\sin\delta_2} = \frac{r_2}{\sin\varphi_2} = \frac{D_{73-5}}{\sin\lambda_2} \qquad (4.69)$$

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{r_2}{D_2} * \sin\delta_2\right) = \arcsin\left(\frac{224.690}{1713.175} * \sin 108.0992\right) = 8^G.3056 \quad (4.70)$$

e. Calculul unghiurilor γ_1, γ_2

$$\gamma_1 = 200 - (\varphi_1 + \delta_1) = 200 - (6.3475 + 147.8151) = 45^G.8374$$
$$\gamma_2 = 200 - (\varphi_2 + \delta_2) = 200 - (8.3056 + 108.0992) = 83^G.5952 \quad (4.71)$$

f. Calculul orientărilor laturilor triunghiurilor

$$\theta^I_{85-4} = \theta_{85-63} + \gamma_1 - \lambda_1 = 89.9948 + 45.8374 - 63.8928 = 71^G.9394$$
$$\theta^{II}_{85-4} = \theta_{85-73} - \gamma_2 - \lambda_1 = 219.4273 - 83.5952 - 63.8928 = 71^G.9393$$
$$\theta^I_{85-5} = \theta_{85-63} + \lambda_1 = 89.9948 + 45.8374 = 135^G.8322$$
$$\theta^{II}_{85-5} = \theta_{85-73} - \gamma_2 = 219.4273 - 83.5952 = 135^G.8321 \quad (4.72)$$
$$\theta^I_{85-6} = \theta_{85-63} + \gamma_1 + \lambda_2 = 89.9948 + 45.8374 + 57.3789 = 193.2111$$
$$\theta^{II}_{85-6} = \theta_{85-73} - \gamma_2 + \lambda_2 = 219.4273 - 83.5952 + 57.3789 = 193.2110$$

g. Calculul coordonatelor punctelor

Calculul coordonatelor punctelor transmise la sol prin radiere Tabelul 4-7

De la	La	Distanța D[m]	Orientarea θij	Coord.relative		Coord.absolute		Pct.
				δ_X	δ_Y	X	Y	
85						7536.629	6177.881	85
85	4	198.497	71.9394	84.6878	179.525	7621.316	6357.406	4
85	5	224.690	135.8322	-119.894	190.029	7416.735	6367.910	5
85	6	200.682	193.2111	-199.542	21.360	7337.087	6199.241	6

$$X_4 = 7621.316\ m \qquad Y_4 = 6357.406\ m$$
$$X_5 = 7416.735\ m \qquad Y_5 = 6367.910\ m \quad (4.73)$$
$$X_6 = 7337.087\ m \qquad Y_6 = 6199.241\ m$$

h. Controlul calculelor:

$$d_1^{mas} = D_{4-5}^{calc} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 204.853 = \sqrt{(7416.735 - 7621.316)^2 + (6367.910 - 6357.406)^2} \Rightarrow \quad (4.74)$$
$$\Rightarrow 204.853 = 204.850$$
$$d_2^{mas} = D_{5-6}^{calc} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 182.526 = \sqrt{(7337.087 - 7416.735)^2 + (6199.241 - 6367.910)^2} \Rightarrow \quad (4.75)$$
$$\Rightarrow 186.526 = 186.523$$

5. TRANSCALCULAREA COORDONATELOR

Uneori, în regiunea unde se efectuează măsurători nu există rețea geodezică astfel că lucrările inginerești de topografie pe care le executăm se vor sprijinii pe puncte ce au fost determinate ca o rețea de triangulație topografică locală într-un sistem de proiecție local. Aceste produse topografice determinate într-un sistem de proiecție local satisfac, de obicei, un interes imediat, legat de rezolvarea unei anumite probleme. Este nevoie ca măsurătorile de pe întreg teritoriul țării să fie reprezentate în același sistem de proiecție unic al țării.

Această operație de încadrare în rețeaua geodezică a țării a unui număr de puncte care au fost determinate într-un sistem local de proiecție sau în oricare alt sistem de referință diferit de sistemul de referință al țării, poartă numele de transcalculare.

Transcalcularea are două aspecte:

1. Aspectul geodezic atunci când punctele geodezice sunt mult depărtate între ele, la determinarea lor s-a ținut seama de forma curbă a Pământului. Din această categorie fac parte punctele geodezice de ordin superior.

Transcalcularea punctelor geodezice de ordin superior dintr-un sistem de proiecție într-altul se face transcalculând acele puncte de pe primul plan de proiecție pe elipsoidul de referință și apoi coordonatele elipsoidale obținute vor fi transcalculate în cel de-al doilea plan de proiecție.

Aceste transcalculări necesită cunoștințe de geodezie și se aplică atunci când se schimbă sistemul de proiecție geodezică sau când poziția anumitor puncte geodezice se cere să fie cunoscută și în alt sistem de proiecție. Aceste transcalculări se vor studia la cursul de Cartografie Matematică.

2. Aspectul topografic atunci când este vorba de puncte care s-au calculat topografic, la determinarea lor nu s-a ținut seama de forma curbă a Pământului. Din această categorie fac parte punctele geodezice de ordin inferior precum și punctele ce au fost determinate într-un sistem topografic local.

La aspectul topografic deosebim următoarele probleme:

5.1. TRANSCALCULAREA GEOMETRICĂ

Sistemul de axe rectangulare xoy pentru o lucrare topografică determinată într-un sistem local xoy diferă de sistemul de axe rectangulare geodezice XOY, atât în ce privește centrul de proiecție și originea axelor rectangulare cât și în ceea ce privește orientarea lor (fig.5.1).

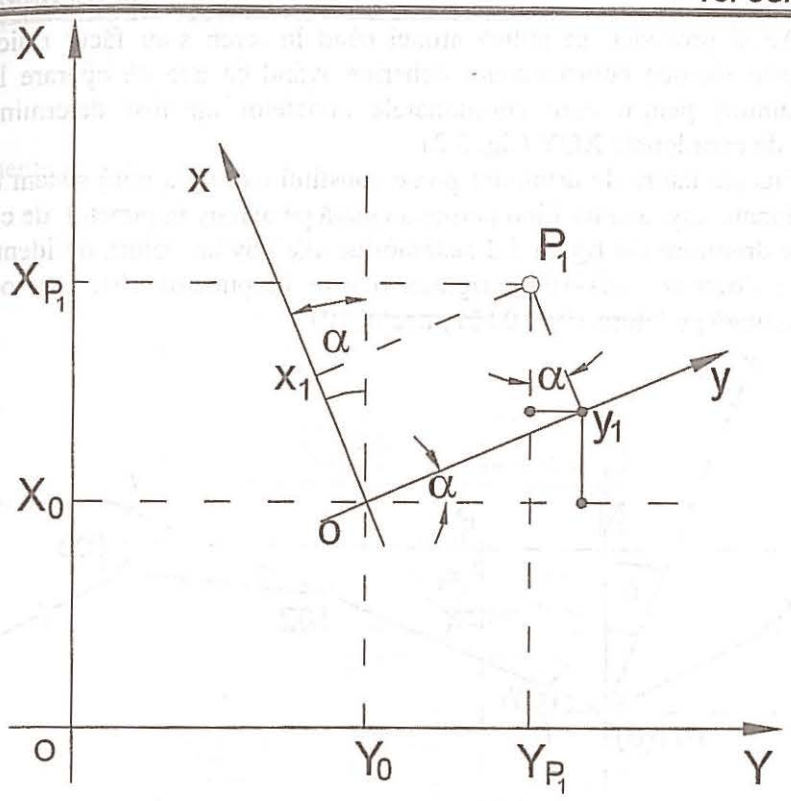


Figura 5.1
Rototranslația axelor de coordonate

Punctul P_1 din fig. (5.1) are coordonate rectangulare atât în sistemul xoy-$P_1(x,y)$, cât şi în sistemul XOY - $P_1(X,Y)$.
Se observă că între coordonatele punctului P_1 în raport cu cele două sisteme de axe există relațiile:

$$X_{P1} = X_0 + y_1 \sin\alpha + x_1 \cos\alpha \qquad (5.1)$$
$$Y_{P1} = Y_0 + y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha$$

- în care:
1. - α - este unghiul de rotație a axelor de coordonate;
2. - x_1, y_1 - sunt coordonatele punctului P_1 în sistemul de coordonate definit de axele xoy, X_{P1}, Y_{P1} sunt coordonatele punctului P_1 în sistemul de coordonate definit de axele XOY;
3. - X_0, Y_0 - sunt coordonatele originii O a sistemului de coordonate definit de axele xoy în raport cu sistemul de coordonate definit de axele XOY.

Acest procedeu se aplică atunci când în teren s-au făcut ridicări de detaliu prin metoda coordonatelor echerice având ca axe de operare laturile unei drumuiri pentru care coordonatele punctelor au fost determinate în sistemul de coordonate XOY (fig. 5.2).

Fiecare latură de drumuire poate constitui axa oy a unui sistem de axe de coordonate xoy, axa ox fiind perpendiculară pe axa oy în punctul de capăt al laturii de drumuire (în figura 5.2 sistemul de axe xoy are latura oy identică cu latura de drumuire 101-102, originea o este în punctul 101, axa ox este perpendiculară pe latura 101-102 în punctul 101).

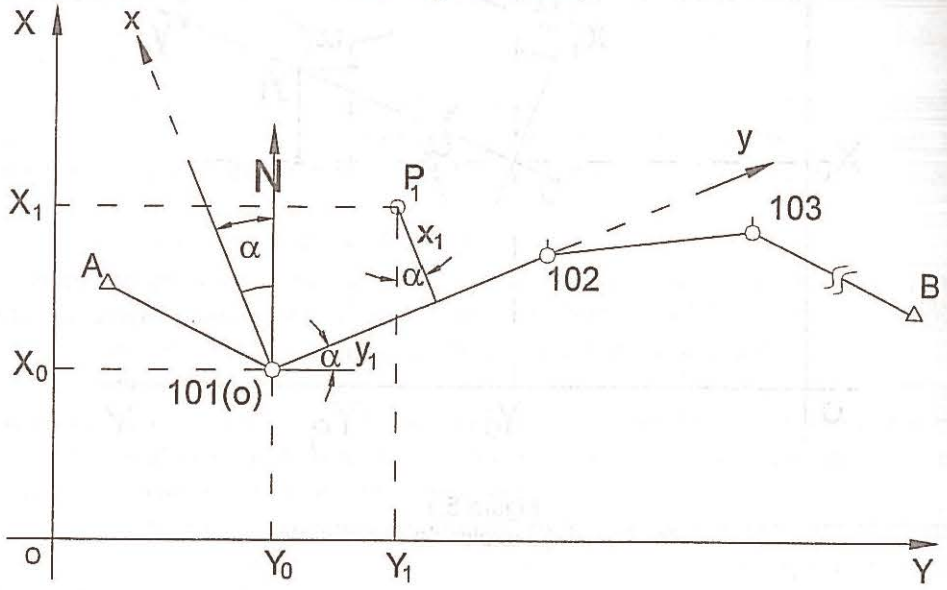


Figura 5.2
Transcalcularea geometrică

Coordonatele punctului P_1 în sistemul XOY se determină cu relația (5.1) cunoscându-se unghiul de rotație între cele două sisteme α, și coordonatele echerice ale punctului P_1 (x_1,y_1).

Unghiul de rotație α dintre cele două sisteme se calculează cu ajutorul orientărilor laturii 101-102 calculată în cele două sisteme de coordonate astfel:

$$\alpha = 100^G - \theta_{101\text{-}102} \qquad (5.2)$$

$$\theta_{101\text{-}102} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{101\text{-}102}}{\Delta X_{101\text{-}102}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_{102} - Y_{101}}{X_{102} - X_{101}} \qquad (5.3)$$

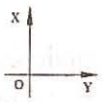
5.1.1. Exemplu. Transcalcularea geometrică a coordonatelor punct cu punct.

1. Elemente inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 2, 3,
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 5-1

Nr. pct.	Coordonate topografice	
	X [m]	Y [m]
2	9638.208	8733.305
3	9550.811	8818.400



2. Măsurători

Coordonatele echerice (abscise și ordonate) ale punctelor 10, 20 și 30 care urmează să fie transcalculate

Tabelul 5-2

Nr. pct.	Coordonate echerice	
	X [m]	Y [m]
10	21.87	32.75
20	21.87	40.43
30	9.04	52.17

3. Schița rețelei topografice locale:

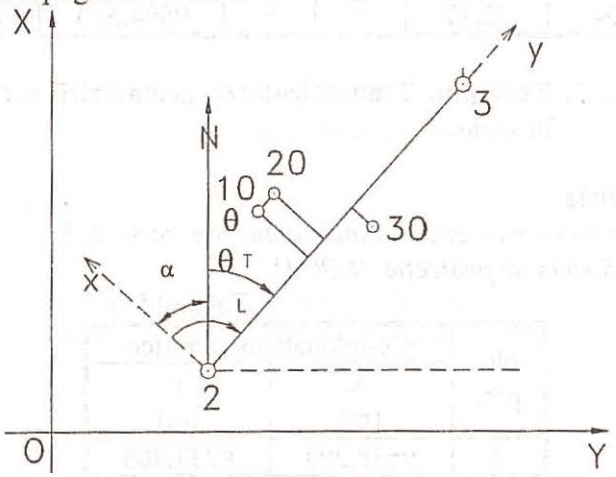


Figura 5.3
Transcalcularea geometrică a coordonatelor

4. Etape de calcul:

a. Calculul unghiului de rotație a sistemului local (α):

$$\theta_T = \theta_{2-3} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{2-3}}{\Delta X_{2-3}} = \frac{8818.400 - 8733.305}{9550.811 - 9638.208} = 150^G.8496 \quad (5.4)$$

$$\alpha = \theta_L - \theta_T = 100^G - \theta_T = 100 - 150.8496 = 394^G.1504 \quad (5.5)$$

unde θ_T este orientarea axului de operație

b. Transcalcularea coordonatelor punct cu punct:

Se ține cont de semnul coordonatelor echerice, iar calculele folosind relațiile (5.6) se pot organiza ca în tabelul 5-3

$$\begin{aligned} X_i &= X_2 + y_i \sin\alpha + x_i \cos\alpha \\ Y_i &= Y_2 + y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha \end{aligned} \quad (5.6)$$

Transcalcularea geometrică a coordonatelor punct cu punct

Tabelul 5-3

Nr. pct.	Coordonate echerice		sinα	cosα	Coordonate topografice	
	x [m]	y [m]			X [m]	Y [m]
2	0	0	-0.716480	0.697608	9638.208	8733.305
10	21.87	32.75			9630.000	8771.721
20	21.87	40.43			9624.497	8777.179
30	9.04	52.17			9594.523	8763.222

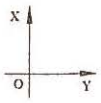
5.1.2. Exemplu. Transcalcularea geometrică a coordonatelor în serie.

1. Elemente inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 2, 3,
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 5-4

Nr. pct.	Coordonate topografice	
	X [m]	Y [m]
2	9638.208	8733.305
3	9550.811	8818.400



2. Măsurători

Coordonatele echerice (abscise şi ordonate) ale punctelor 10, 20 şi 30 care urmează să fie transcalculate

Tabelul 5-5

Nr. pct.	Coordonate echerice	
	X [m]	Y [m]
10	21.87	32.75
20	21.87	40.43
30	9.04	52.17

3. Schița rețelei topografice locale:

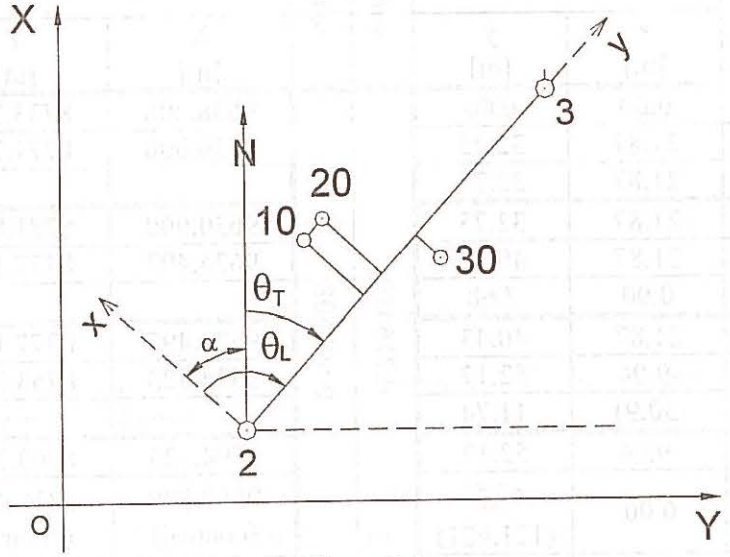


Figura 5.4
Transcalcularea geometrică a coordonatelor

4. Etape de calcul:

a. Calculul unghiului de rotație a sistemului local (α):

$$\theta_T = \theta_{2-3} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{2-3}}{\Delta X_{2-3}} = \frac{8818.400 - 8733.305}{9550.811 - 9638.208} = 150^G.8496 \quad (5.7)$$

$$\alpha = \theta_L - \theta_T = 100^G - \theta_T = 100 - 150.8496 = 394^G.1504 \quad (5.8)$$

unde θ_T este orientarea axului de operație

b. Transcalcularea coordonatelor în serie:

Se va parcurge traseul 2-10-20-30-3, se ține cont de semnul coordonatelor echerice, iar calculele folosind relațiile (5.9) se pot organiza ca în tabelul 5-6

$$\begin{aligned} X_i &= X_{i-1} + (y_i - y_{i-1})\sin\alpha + (x_i + x_{i-1})\cos\alpha \\ Y_i &= Y_{i-1} + (y_i - y_{i-1})\cos\alpha - (x_i + x_{i-1})\sin\alpha \end{aligned} \qquad (5.9)$$

Transcalcularea geometrică a coordonatelor punct cu punct

Tabelul 5-6

Nr. Pct.	Coordonate echerice		sinα	cosα	Coordonate topografice	
	x [m]	y [m]			X [m]	Y [m]
2	0.00	0.00	-0.716480	0.697608	9638.208	8733.305
10	21.87	32.75			9630.000	8771.721
Δ	21.87	32.75				
10	21.87	32.75			9630.000	8771.821
20	21.87	40.43			9624.497	8777.179
Δ	0.00	7.68				
20	21.87	40.43			9624.497	8777.179
30	-9.04	52.17			9594.523	8763.222
Δ	-30.91	11.74				
30	-9.04	52.17			9594.523	8763.222
2	0.00	D_{2-3}^{coord} (121.981)			9550.809 (control)	8818.400 (control)
Δ	9.04	69.811				

5.2. *TRANSCALCULAREA TOPOGRAFICĂ*

5.2.1. Procedeul clasic

Suntem în situația în care avem două sisteme de axe de coordonate rectangulare xoy pe care îl vom numi generic "sistem topografic" şi XOY pe care îl vom numi "sistem geodezic" (fig. 5.5).

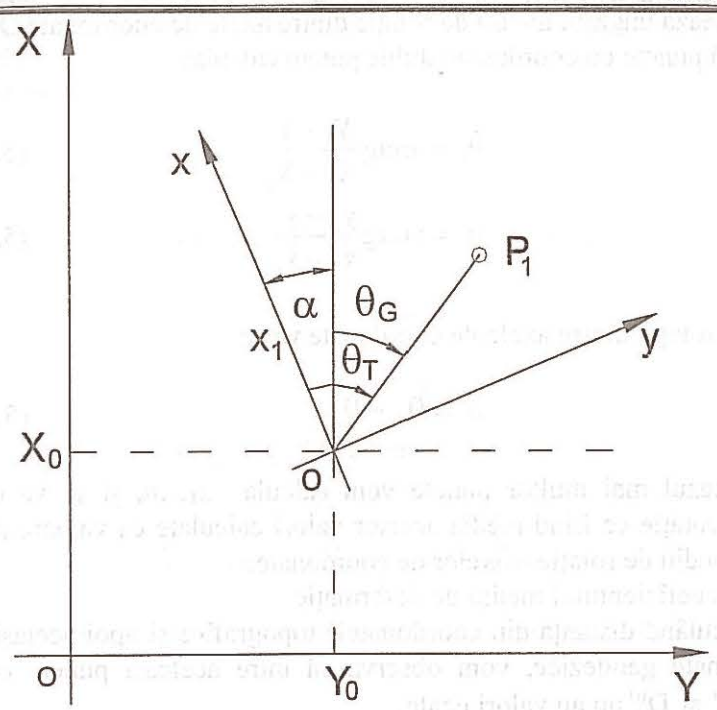


Figura 5.5
Transcalcularea topografică

Între coordonatele punctului P_1 în raport cu cele două sisteme de axe de coordonate există relațiile:

$$\begin{aligned} X_{P1} &= X_0 + y_1 \sin\alpha + x_1 \cos\alpha \\ Y_{P1} &= Y_0 + y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha \end{aligned} \qquad (5.10)$$

Aceste relații pot fi generalizate pentru i puncte:

$$\begin{aligned} X_i &= X_0 + y_i \sin\alpha + x_i \cos\alpha \\ Y_i &= Y_0 + y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha \end{aligned} \qquad (5.11)$$

Transcalcularea coordonatelor din "sistemul topografic" în "sistemul geodezic" presupune parcurgerea următoarelor faze de teren și de birou:
1. Se determină prin operațiuni de teren și birou un număr de puncte de triangulație locală în "sistem geodezic". Deci un număr de puncte vor avea coordonate duble atât în "sistemul topografic" local cât și în "sistemul geodezic".

2. Se calculează unghiul mediu de rotație dintre axele de coordonate OX și ox
Pentru două puncte cu coordonate duble putem calcula:

$$\theta_G = \text{arctg}\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \qquad (5.12)$$

$$\theta_T = \text{arctg}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (5.13)$$

Unghiul de rotație dintre axele de coordonate va fi:

$$\alpha = \theta_T - \theta_G \qquad (5.14)$$

În cazul mai multor puncte vom calcula $\alpha_1 \ldots \alpha_i$ și se va considera unghiul de rotație ca fiind media acestor valori calculate ca valoare posibilă a unghiului mediu de rotație a axelor de coordonate.

3. Calculul coeficientului mediu de deformație

Calculând distanța din coordonatele topografice și apoi aceiași distanță din coordonate geodezice, vom observa că între aceleași puncte cele două distanțe $D_T^{(i)}$ și $D_G^{(i)}$ nu au valori egale.

Perechile de distanțe nu sunt egale, deși pe teren avem aceleași amplasamente pentru cele două puncte, pentru că:

a. punctele au coordonate determinate cu precizii diferite în cele două sisteme de axe de coordonate;

b. datorită deformațiilor specifice sistemelor de proiecție corespunzătoare celor două sisteme.

Va trebui să corectăm coordonatele locale în așa fel încât să obținem distanțe egale cu cele obținute din coordonate geodezice. Această corectare se face prin calcularea unui coeficient mediu de deformație cu care se înmulțesc distanțele calculate din coordonatele sistemului topografic (operația se numește punere în scară).

Valoarea K cu care se corectează distanțele din sistemul topografic se calculează astfel:

$$K = \frac{D_G}{D_T} \qquad (5.15)$$

în care :

- D_G este distanța dintre două puncte calculată din coordonatele determinate în sistemul geodezic;
- D_T este distanța dintre aceleași puncte calculată din coordonate determinate în "sistemul topografic".

Pentru mai multe perechi de puncte cu coordonate duble vor fi calculați corespunzător K_i coeficienți de punere în scară care trebuie să îndeplinească condiția de toleranță:

$$|K_{max} - K_{min}| \leq T_K \tag{5.16}$$

Valoarea cea mai probabilă pentru mărimea K calculată va fi:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i}{n} \tag{5.17}$$

Cu aceste considerente relațiile (5.11) devin:

$$\begin{aligned} X_i &= X_0 + (x_i^* K)\cos\alpha + (y_i^* K)\sin\alpha \\ Y_i &= Y_0 + (y_i^* K)\cos\alpha - (x_i^* K)\sin\alpha \end{aligned} \tag{5.18}$$

În relațiile (5.18) explicităm coordonatele X_0 și Y_0 ale originii sistemului topografic:

$$\begin{aligned} X_0 &= X_i - (x_i^* K)\cos\alpha - (y_i^* K)\sin\alpha \\ Y_0 &= Y_i - (y_i^* K)\cos\alpha + (x_i^* K)\sin\alpha \end{aligned} \tag{5.19}$$

Relațiile (5.19) pot fi aplicate pentru fiecare punct ce are determinate coordonate duble în cele două sisteme de referință, rezultând perechi de coordonate ale originii sistemului topografic care trebuie să îndeplinească condiția de toleranță.

$$\begin{aligned} \left|X_0^{(max)} - X_0^{(min)}\right| &\leq T_X \\ \left|Y_0^{(max)} - Y_0^{(min)}\right| &\leq T_Y \end{aligned} \tag{5.20}$$

Valorile cele mai probabile pentru coordonatele originii sistemului topografic vor fi:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_0^{(i)}}{n} \\ Y_0 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_0^{(i)}}{n} \end{aligned} \tag{5.21}$$

4. Calculul coordonatelor geodezice ale punctelor determinate numai în "sistemul topografic"

Presupunem că avem 2 puncte pentru care aplicăm relația (5.18)

$$X_1 = X_0 + x_1*(K*\cos\alpha) + y_1*(K*\sin\alpha) \qquad (5.22)$$
$$Y_1 = Y_0 + y_1*(K*\cos\alpha) - x_1*(K*\sin\alpha)$$

$$X_2 = X_0 + x_2*(K*\cos\alpha) + y_2*(K*\sin\alpha) \qquad (5.23)$$
$$Y_2 = Y_0 + y_2*(K*\cos\alpha) - x_2*(K*\sin\alpha)$$

Scădem relațiile (5.22) din relațiile (5.23):

$$X_2 - X_1 = X_0 - X_0 + (x_2 - x_1)*(K*\cos\alpha) + (y_2 - y_1)*(K*\sin\alpha) \qquad (5.24)$$
$$Y_2 - Y_1 = Y_0 - Y_0 + (y_2 - y_1)*(K*\cos\alpha) - (x_2 - x_1)*(K*\sin\alpha)$$

sau:

$$X_2 = X_1 + (x_2 - x_1)*(K*\cos\alpha) + (y_2 - y_1)*(K*\sin\alpha) \qquad (5.25)$$
$$Y_2 = Y_1 + (y_2 - y_1)*(K*\cos\alpha) - (x_2 - x_1)*(K*\sin\alpha)$$

Aceste relații permit calculul coordonatelor în "sistemul geodezic" pentru punctul P_2 în funcție de coordonatele geodezice ale punctului P_1, de coordonatele din "sistemul topografic" ale celor două puncte și de unghiul de rotație α dintre sistemele de axe de referință

5. Calculul coeficienților $K*\sin\alpha$ și $K*\cos\alpha$.

Din prima relație a sistemului (5.24) explicităm expresia $(K*\sin\alpha)$:

$$(X_2 - X_1) - (x_2 - x_1)*K*\cos\alpha = (y_2 - y_1)*K*\sin\alpha \qquad (5.26)$$

$$K*\sin\alpha = \frac{(X_2 - X_1) - (x_2 - x_1)*K*\cos\alpha}{(y_2 - y_1)} \qquad (5.27)$$

Din a doua relație a sistemului (5.24) explicităm aceiași expresie $(K*\sin\alpha)$:

$$(Y_2 - Y_1) - (y_2 - y_1)*K*\cos\alpha = -(x_2 - x_1)*K*\sin\alpha \qquad (5.28)$$

$$K*\sin\alpha = \frac{-(Y_2 - Y_1) + (y_2 - y_1)*K*\cos\alpha}{(x_2 - x_1)} \qquad (5.29)$$

egalăm relațiile (5.27) și (5.29) și obținem :

$$\frac{(X_2 - X_1) - (x_2 - x_1) * K * \cos\alpha}{(y_2 - y_1)} = \frac{-(Y_2 - Y_1) + (y_2 - y_1) * K * \cos\alpha}{(x_2 - x_1)} \quad (5.30)$$

Facem produsul mezilor și al extremilor în relația (5.30) și avem:

$$(X_2 - X_1)*(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)^2 * K * \cos\alpha = -(Y_2 - Y_1)*(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2 * K * \cos\alpha$$

$$K*\cos\alpha*[(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2] = (X_2 - X_1)*(x_2 - x_1) + (Y_2 - Y_1)*(y_2 - y_1) \quad (5.31)$$

Explicităm expresia (K*cosα)

$$K\cos\alpha = \frac{(X_2 - X_1)*(x_2 - x_1) + (Y_2 - Y_1)*(y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \quad (5.32)$$

Facem notațiile:

$$\begin{aligned} X_2 - X_1 &= \Delta X \\ Y_2 - Y_1 &= \Delta Y \\ y_2 - y_1 &= \delta y \\ x_2 - x_1 &= \delta x \end{aligned} \quad (5.33)$$

Înlocuind (5.33) în (5.32) obținem:

$$K\cos\alpha = \frac{\Delta X * \delta x + \Delta Y * \delta y}{\delta x^2 + \delta y^2} \quad (5.34)$$

Expresia (5.34) o înlocuim în relația (5.27) și avem:

$$K*\sin\alpha = \frac{\Delta X - \delta x \dfrac{\Delta X * \delta x + \Delta Y * \delta y}{\delta x^2 + \delta y^2}}{\delta y} = \quad (5.35)$$

$$= \frac{\Delta X * \delta x^2 + \Delta X * \delta y^2 - \Delta X * \delta x^2 - \Delta Y * \delta x * \delta y}{\delta y * (\delta x^2 + \delta y^2)}$$

Rezultă:

$$K\sin\alpha = \frac{\Delta X \delta y - \Delta Y \delta x}{\delta x^2 + \delta y^2} \quad (5.36)$$

Relațiile (5.34) și (5.36) pot fi aplicate pentru perechi de puncte ce au determinate coordonate duble, rezultând perechi de coeficienți $(K*\sin\alpha)_i$ și $(K*\cos\alpha)_i$ care trebuie să îndeplinească condiția de toleranță :

$$(5.37)\qquad \begin{aligned}(K*\sin\alpha)^{max} - (K*\sin\alpha)^{min} \le T\\ (K*\cos\alpha)^{max} - (K*\cos\alpha)^{min} \le T\end{aligned}$$

Valorile cele mai probabile pentru expresiile $(K*\sin\alpha)$ și $(K*\cos\alpha)$ vor fi :

$$(5.38)\qquad K*\sin\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n}(K*\sin\alpha)_i}{n}$$

$$K*\cos\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n}(K*\cos\alpha)_i}{n}$$

6. Transcalculul coordonatelor

Transcalculul propriu-zis se efectuează din punct în punct aplicând relațiile (5.25) pe un traseu de forma unei drumuiri, pornind de la un punct de coordonate duble și închizându-ne tot pe un punct de coordonate duble.

5.2.1.1. Exemplu. Transcalcularea topografică a coordonatelor. Tratare clasică

1. Elemente inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 56, 59, 73, 77 în Sistem de proiecție "TOPOGRAFIC" și Sistem de proiecție "GEODEZIC"

Tabelul 5-7

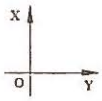
Nr. pct.	Coordonate topografice		Coordonate geodezice	
	x [m]	y [m]	X [m]	Y [m]
56	5916.022	9648.995	335687.920	588531.500
59	8704.780	9507.900	335653.629	591323.587
73	5663.156	5902.607	339442.755	588514.371
77	8873.495	7006.267	338139.707	591649.045

2. Măsurători

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 55, 63, 85, 92 în Sistem de proiecție "TOPOGRAFIC" care urmează să fie transcalculate

Tabelul 5-8

Nr. pct.	Coordonate topografice	
	x [m]	y [m]
55	6959.121	10133.111
63	7807.489	7794.871
85	6177.881	7536.629
92	7560.912	6058.081



3. Schița rețelei topografice locale:

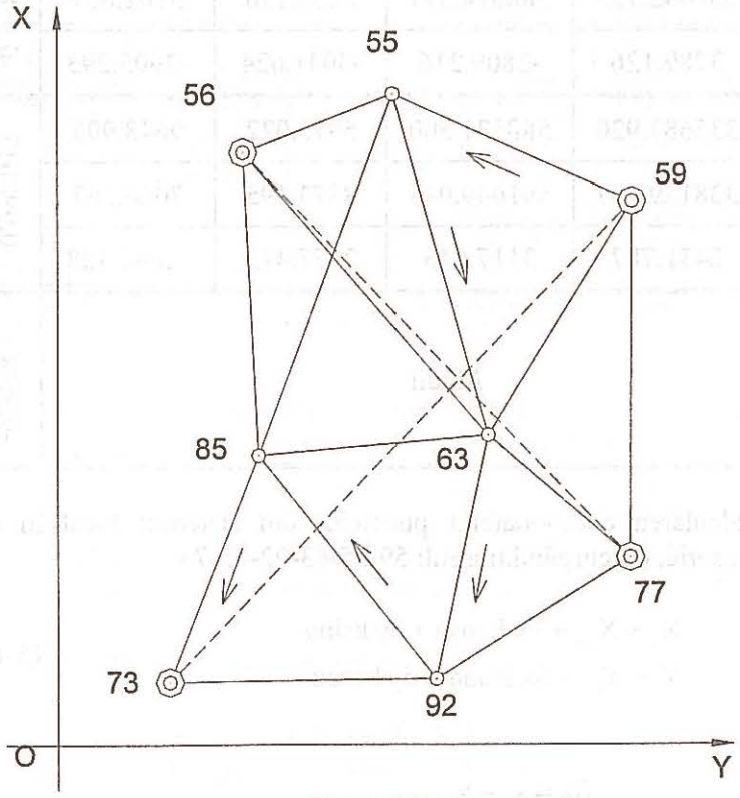


Figura 5.6
Transcalcularea topografică. Tratare clasică

4. Etape de calcul:

a. Calculul coeficienților k*sinα și k*cosα:

$$K * \sin\alpha = \frac{\Delta X * \delta y - \Delta Y * \delta x}{\delta x^2 + \delta y^2}$$
$$K * \cos\alpha = \frac{\Delta X * \delta x + \Delta Y * \delta y}{\delta x^2 + \delta y^2} \qquad (5.39)$$

*Calculul coeficienților K*sinα și K*cosα*

Tabelul 5-9

Nr. pct.	Coordonate geodezice		Coordonate topografice		K*sinα	K*cosα
	X [m]	Y [m]	x [m]	y [m]		
59	335653.629	591323.587	8704.780	9507.900	-0.998017	-0.062790
73	339442.755	588514.371	5663.156	5902.607		
Δ	3789.126	-2809.216	-3041.624	-3605.293		
56	335687.920	588531.500	5916.022	9648.995	-0.998017	-0.062790
77	338139.707	591649.045	8873.495	7006.267		
Δ	2451.787	3117.545	2957.473	-2642.728		
Medii					-0.998017	-0.062790

b. Transcalcularea coordonatelor punctelor din sistemul local în sistemul geodezic în serie, parcurgând traseul: 59-55-63-92-85-73

$$X_i = X_{i-1} + \delta x\, k\cos\alpha + \delta y\, k\sin\alpha$$
$$Y_i = Y_{i-1} - \delta x\, k\sin\alpha + \delta y\, k\cos\alpha \qquad (5.40)$$

unde:

$$\delta x = x_i - x_{i-1}$$
$$\delta y = y_i - y_{i-1} \qquad (5.41)$$

Transcalcularea coordonatelor punctelor din sistemul local în sistemul geodezic

Tabelul 5-10

Pct.	Coordonate topografice		K*sin α	K*cos α	Coordonate geodezice		Pct.
	x [m]	y [m]			X [m]	Y [m]	
1	2	3	4	5	6	7	8
59	8704.780	9507.900	-0.998017	-0.062790	335653.629	591323.587	59
55	6959.121	10133.111			335139.268	589542.133	55
Δ	-1745.659	625.211					
55	6959.121	10133.111			335139.268	589542.133	55
63	7807.489	7794.871			337419.602	590535.637	63
Δ	848.368	-2338.240					
63	7807.489	7794.871			337419.602	590535.637	63
92	7560.912	6058.081			339168.438	590398.602	92
Δ	-246.577	-1736.790					
92	7560.912	6058.081			339168.438	590398.602	92
85	6177.881	7536.629			337779.655	588925.475	85
Δ	-1383.031	1478.548					
85	6177.881	7536.629			337779.655	588925.475	85
73	5663.156	5902.607			339442.755	588514.371	73
Δ	-514.725	-1634.022			control	control	

5.2.2. Transcalcularea din sistem topografic în sistem geodezic prin utilizarea teoriei celor mai mici pătrate

Considerăm n puncte de coordonate cunoscute în ambele sisteme XOY şi xoy (fig. 5.7). Presupunem că mai avem j puncte care au coordonate numai în sistemul xoy şi dorim să determinăm coordonatele acestor puncte în sistemul XOY.

Pornim de la relaţiile de transcalcul cunoscute (5.18):

$$X = X_0 + x*K*\cos\alpha + y*K*\sin\alpha \qquad (5.42)$$
$$Y = Y_0 + y*K*\cos\alpha - x*K*\sin\alpha$$

Relaţiile (5.42) pun în evidenţă rototranslaţia şi coeficientul de punere în scară.

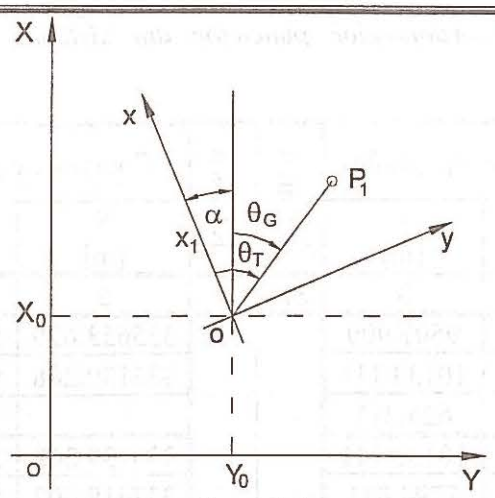


Figura 5.7
Transcalcularea topografică

Notăm:

$$\begin{aligned} K*\cos\alpha &= a \\ K*\sin\alpha &= b \\ X_0 &= c \\ Y_0 &= d \end{aligned} \qquad (5.43)$$

Înlocuind relațiile (5.43) în relațiile (5.42) obținem:

$$\begin{aligned} X &= ax + by + c \\ Y &= -bx + ay + d \end{aligned} \qquad (5.44)$$

În sistemul (5.44) avem patru necunoscute, deci la limită, este nevoie d două puncte cu coordonate duble care generează patru astfel de ecuații. Dac avem mai mult de două puncte cu coordonate duble atunci valorile a, b, c, d s deduc prin metoda celor mai mici pătrate.
Pentru i = 1, 2,....., n sistemul (5.44) devine:

$$\begin{aligned} ax_i + by_i + c - X_i &= v_{xi} \\ -bx_i + ay_i + d - Y_i &= v_{yi} \end{aligned} \qquad (5.45)$$

Sistemul (5.45) poate fi scris sub formă matricială astfel:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \qquad (5.46)$$

Determinantul matricii din sistemul (5.46) are valoarea 1, atunci avem o transformare afină.

Punem condiția de minim:

$$S = \left[v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2\right] = \min. \qquad (5.47)$$

Această condiție aplicată sistemului (5.46) este scrisă sub forma:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + c - X_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(-bx_i + ay_i + d - Y_i)^2 = \min. \qquad (5.48)$$

Funcția (5.48) este îndeplinită dacă se anulează derivatele parțiale ale funcției în raport cu necunoscutele a, b, c, d.

$$\frac{\delta s}{\delta a} = 0 \quad \frac{\delta s}{\delta b} = 0 \quad \frac{\delta s}{\delta c} = 0 \quad \frac{\delta s}{\delta d} = 0 \qquad (5.49)$$

Efectuăm derivatele (5.49) și obținem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta s}{\delta a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + c - X_i)x_i + 2\sum_{i=1}^{n}(-bx_i + ay_i + d - Y_i)y_i = 0\\
&\frac{\delta s}{\delta b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + c - X_i)y_i + 2\sum_{i=1}^{n}(-bx_i + ay_i + d - Y_i)(-x_i) = 0\\
&\frac{\delta s}{\delta c} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + c - X_i) = 0\\
&\frac{\delta s}{\delta d} = 2\sum_{i=1}^{n}(-bx_i + ay_i + d - Y_i) = 0
\end{aligned} \qquad (5.50)$$

Ecuațiile (5.50) alcătuiesc sistemul normal al ecuațiilor de corecție (5.51).

$$\begin{cases}
a\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) + b\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - x_iy_i) + c\sum_{i=1}^{n}x_i + d\sum_{i=1}^{n}y_i + \sum_{i=1}^{n}(-X_ix_i - Y_iy_i) = 0\\
a\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - x_iy_i) + b\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 + x_i^2) + c\sum_{i=1}^{n}y_i + d\sum_{i=1}^{n}(-x_i) + \sum_{i=1}^{n}(-X_iy_i + Y_ix_i) = 0\\
a\sum_{i=1}^{n}x_i + b\sum_{i=1}^{n}y_i + c\sum_{i=1}^{n}1 + \sum_{i=1}^{n}(-x_i) = 0\\
a\sum_{i=1}^{n}y_i + b\sum_{i=1}^{n}(-x_i) + d\sum_{i=1}^{n}1 - \sum_{i=1}^{n}(-y_i) = 0
\end{cases} \qquad (5.51)$$

Sistemul (5.51) este simetric, iar scris matricial este:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) & \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-x_iy_i) & \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-x_iy_i) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) & \sum_{i=1}^{n}y_i & \sum_{i=1}^{n}(-x_i) \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}y_i & n & 0 \\ \sum_{i=1}^{n}y_i & \sum_{i=1}^{n}(-x_i) & 0 & n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(X_ix_i+Y_iy_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(X_iy_i+Y_ix_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(X_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(Y_i) \end{pmatrix} \tag{5.52}$$

Prin rezolvare se determină necunoscutele a, b, c, d. Valorile parametrilor a, b, c, d, servesc la efectuarea transcalculului propriu-zis prin intermediul relațiilor (5.44). În unele cazuri se pot face simplificări pentru determinarea coeficienților a, b, c, d, dacă se calculează centrul de greutate al cordonatelor punctelor comune şi apoi valorile x_i' şi y_i' ca diferențe dintre coordonatele punctelor respective şi coordonatele centrului de greutate.
Coordonatele centrului de greutate se calculează cu relațiile:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n} \tag{5.53}$$

Coordonatele baricentrice pentru punctele determinate în "sistemul topografic" vor fi calculate astfel:

$$x_i' = x_i - \bar{x}$$
$$y_i' = y_i - \bar{y} \tag{5.54}$$

- în acest caz avem:

$$\sum x_i' = 0$$
$$\sum y_i' = 0 \tag{5.55}$$

din relația (5.55) rezultă că matricea coeficienților sistemului normal va avea forma:

$$N=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix} \qquad (5.56)$$

Rezultând valorile estimate ale parametrilor a, b, c, d:

$$\hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i x_i'+Y_i y_i')}{\sum_{i=1}^{n}(x_i'^2+y_i'^2)}$$

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i y_i'-Y_i x_i')}{\sum_{i=1}^{n}(x_i'^2+y_i'^2)}$$

$$\hat{c}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n} \qquad (5.57)$$

$$\hat{d}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}$$

Pentru parametrii a, b, c, d se pot determina şi erorile cu care aceştia sunt determinați.

Matricea de varianță-covarianță este de forma:

$$N^{-1}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i'^2+y_i'^2)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n}(x_i'^2+y_i'^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n^{-1} \end{pmatrix} \qquad (5.58)$$

Abaterile standard empirice cu care au fost determinate necunoscutele a, b, c şi d vor fi:

$$\sigma_a = \sigma_0\sqrt{Q_{aa}} = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i'^2+y_i'^2)}}$$

$$\sigma_b = \sigma_0\sqrt{Q_{bb}} = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i'^2+y_i'^2)}} \qquad (5.59)$$

$$\sigma_c = \sigma_0\sqrt{Q_{cc}} = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\sigma_d = \sigma_0\sqrt{Q_{dd}} = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{n}}$$

În care abaterea standard empirică a unității de pondere este:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{[v_{x_i} \cdot v_{x_i}]}{2n-r}} \qquad (5.60)$$

unde:
- 2n este numărul total de ecuații;
- r este redundanța adică numărul necesar de ecuații.

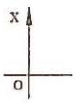
5.2.2.1. Exemplu. Transcalcularea topografică a coordonatelor. Tratare matricială.

1. Elemente inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 56, 59, 73, 77 în Sistem de proiecție "TOPOGRAFIC" şi Sistem de proiecție "GEODEZIC"

Tabelul 5-11

Nr. pct.	Coordonate topografice		Coordonate geodezice	
	x [m]	y [m]	X [m]	Y [m]
56	5916.022	9648.995	335687.920	588531.500
59	8704.780	9507.900	335653.629	591323.587
73	5663.156	5902.607	339442.755	588514.371
77	8873.495	7006.267	338139.707	591649.045

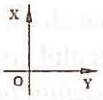


2. Măsurători

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 55, 63, 85, 92 în Sistem de proiecție "TOPOGRAFIC" care urmează să fie transcalculate

Tabelul 5-12

Nr. pct.	Coordonate topografice	
	X [m]	Y [m]
55	6959.121	10133.111
63	7807.489	7794.871
85	6177.881	7536.629
92	7560.912	6058.081



3. Schița rețelei topografice locale:

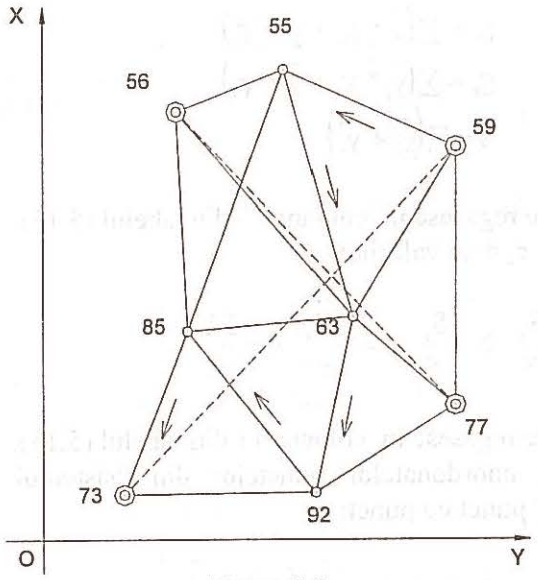


Figura 5.8
Transcalcularea topografică. Tratare matricială

4. Etape de calcul:

a. Calculul coordonatelor centrului de greutate al punctelor comune:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{5916.022 + 8704.780 + 5663.156 + 8876.495}{4} = 7289.363$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{9648.995 + 9507.900 + 5902.607 + 7006.267}{4} = 8016.442 \qquad (5.61)$$

b. Calculul coordonatelor reduse la centrul de greutate:

$$\bar{x}_i = x_i - \bar{x}$$
$$\bar{y}_i = y_i - \bar{y} \qquad (5.62)$$

- coloanele 8, 9 din tabelul (5.13).

c. Calculul coeficienților a, b și al constantelor c, d (necunoscute):

c1. sistemul normal scris sub formă matriceală este:

$$\begin{pmatrix} \sum\left(\overline{x_i^2}+\overline{y_i^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum\left(\overline{x_i^2}+\overline{y_i^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\left(\overline{x_i} * X_i + \overline{y_i} * Y_i\right) \\ \sum\left(\overline{y_i} * X_i + \overline{x_i} * Y_i\right) \\ \sum X_i \\ \sum Y_i \end{pmatrix} \qquad (5.63)$$

$$S_a = \sum\left(\overline{x_i} * X_i + \overline{y_i} * Y_i\right)$$
$$S_b = \sum\left(\overline{y_i} * X_i + \overline{x_i} * Y_i\right) \qquad (5.64)$$
$$S = \sum\left(\overline{x_i^2} + \overline{y_i^2}\right)$$

- valorile S_a, S_b, S se regasesc în coloana 10 din tabelul (5.13).

c2. coeficienții a, b, c, d au valorile:

$$a = \frac{S_a}{S} \quad b = \frac{S_b}{S} \quad c = \frac{\sum X_i}{n} \quad d = \frac{\sum Y_i}{n} \qquad (5.65)$$

- valorile a, b, c, d se regasesc în coloana 11 din tabelul (5.13).

d. Transcalcularea coordonatelor punctelor din "sistemul topografic în "sistemul geodezic" punct cu punct:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \qquad (5.66)$$

$$X_i = a\bar{x}_i + b\bar{y}_i + c$$
$$Y_i = -b\bar{x}_i + a\bar{y}_i + d \qquad (5.67)$$

Calculul coeficienților a, b, c, d

Tabelul 5-13

Nr.Pct.	Coordonate geodezice		Coordonate topografice		Coord. centrului de greutate		Coordonate reduse la centrul de greutate		S, S_a, S_b	a,b, c, d
	X_i	Y_i	x_i	y_i	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
56	335687.920	588531.500	5916.022	9648.995	7289.363	8016.442	-1373.342	1632.553	19421922.39, -19383404.73, -1219501.445	-0.062790, -0.998017, 337231.0, 590004.6258
59	335653.629	591323.587	8704.780	9507.900			1415.417	1491.458		
73	339442.755	588514.371	5663.156	5902.607			-1626.207	-2113.835		
77	338139.707	591649.045	8873.495	7006.267			1584.132	-1010.176		
Σ	1348924.011	2360018.503					0	0		

Transcalcularea coordonatelor punctelor din sistemul local în sistemul geodezic

Tabelul 5-14

Nr.Pct.	Coordonate topografice		Coord. centru de greutate		Coordonate reduse la centrul de greutate		a, b, c, d	Coordonate geodezice	
	x_i	y_i	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$		X_i	Y_i
55	6959.121	10133.111	7289.363	8016.442	-167.229	2252.438	-0.062790, -0.998017, 337231.0, 590004.626	335139.265	589542.132
63	7807.489	7794.871			681.138	-85.802		337419.595	590535.636
85	6177.881	7536.629			-948.470	-344.044		337779.651	588925.475
92	7560.912	6058.081			434.561	-1822.59		339168.427	590398.601

5.3. Transcalcularea din "Sistem de Proiecție Stereografic 1970" în "Sistem de Proiecție Stereografic Local"

Pentru localitățile la care determinarea suprafețelor de teren, folosind sistemul de proiecție unic al țării, suferă deformații mari, s-au creat sisteme speciale de proiecție numite "Sistem de Proiecție Stereografic Local". Aceste sisteme de proiecție derivă din sistemul de proiecție oficial, azi în România "Sistemul de Proiecție Stereografică 1970".

La localitățile depărtate de cercul de deformație nulă, la care deformațiile liniare sunt mai mari de ± 5cm/km se adoptă în mod obligatoriu un sistem de proiecție "Stereografic Local" ale cărui elemente se determină după cum urmează:

1. Se alege un punct situat în centrul rețelei topografice a localității ale cărui coordonate determinate în "Sistemul de Proiecție Stereografic 1970 " sunt X_{70}, Y_{70} și se calculează:

$$x_{70} = X_{70} - 500000 \text{ m}$$
$$y_{70} = Y_{70} - 500000 \text{ m} \qquad (5.68)$$

- unde 500000 m reprezintă valorile coordonatelor X și Y ale centrului "Sistemului de Proiecție Stereografică 1970".

2. Se calculează distanța de la centrul "Sistemului de Proiecție Stereografică 1970" până la punctul considerat:

$$r = \sqrt{x_{70}^2 + y_{70}^2} \qquad (5.69)$$

3. Calculul valorii U – modul de deformație liniar:

$$U = 1 - \frac{r^2}{4R_0^2} \qquad (5.70)$$

- în care R_0=6378956.594 m și reprezintă raza Pământului.

4. Calculul coeficientul de transformare al coordonatelor din "Sistemului de Proiecție Stereografică 1970" în "Sistemul Stereografic Local":

$$c = \frac{U}{0.99975} \qquad (5.71)$$

5. Calculul coordonatelor punctelor rețelei nou create în "Sistemul Stereografic Local":

$$X_L^i = 500000 + x_{70}^i * c$$
$$Y_L^i = 500000 + y_{70}^i * c \qquad (5.72)$$

- în care:

$$x_{70}^i = X_{70}^i - 500000$$
$$Y_{70}^i = Y_{70}^i - 500000 \qquad (5.73)$$

- pentru i=1,2....n, n fiind numărul de puncte din rețea.

6. Transcalcularea coordonatelor din "Sistemul de Proiecție Stereografică 1970" în "Sistemul de Proiecție Stereografic Local" se face cu relația:

$$X_L^i = x_{70}^i * c + 500000(1-c)$$
$$Y_L^i = y_{70}^i * c + 500000(1-c) \qquad (5.74)$$

Transcalcularea coordonatelor din "Sistemul de Proiecție Stereografic Local" în "Sistemul de Proiecție Stereografică 1970" se face cu relația:

$$X_{70}^i = \frac{X_L^i}{c} + 500000 * \frac{c-1}{c}$$
$$Y_{70}^i = \frac{Y_L^i}{c} + 500000 * \frac{c-1}{c} \qquad (5.75)$$

5.3.1. Exemplu. Transcalcularea din "Sistem de Proiecție Stereografic 1970" în "Sistem de Proiecție Stereografic Local"

1. Elemente inițiale

Inventar cu coordonatele punctelor vechi în Sistem de proiecție "STEREOGRAFIC 1970"

Tabelul 5-15

Nr. pct.	X [m]	Y [m]
C001	297003,977	783580,952
C002	297197,402	783866,966
C003	296913,874	784604,035
C004	296677,799	784202,929

2. Etape de calcul:

a. Calculul coordonatelor punctului central al rețelei:

$$\bar{x}_{70} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{297003.977 + 297197.402 + 296913.874 + 296677.799}{4} = 296948.26$$

$$\bar{y}_{70} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{783580.952 + 783866.966 + 784604.035 + 784202.929}{4} = 784063.72$$

(5.76)

b. Calculul valorilor x_{70}, y_{70}:

$$x_{70} = \bar{x}_{70} - 500000 = 296948.263 - 500000 = -203051.737\text{m}$$

$$y_{70} = \bar{y}_{70} - 500000 = 784063.721 - 500000 = 284063.721\text{m} \quad (5.77)$$

c. Calculul distanței de la centrul "Sistemului de Proiecție Stereografică 1970" până la punctul central al rețelei:

$$r = \sqrt{x_{70}^2 + y_{70}^2} = \sqrt{-203051.737^2 + 284063.721^2} = 349173.603\text{m} \quad (5.78)$$

d. Calculul valorii U:

$$U = 1 - \frac{r^2}{4R_0^2} = 1 - \frac{349173.603^2}{4 * 6378956.594^2} = 0.999251 \quad (5.79)$$

- în care R_0=6378956.594 m este raza Pământului.

e. Calculul coeficientul de transformare al coordonatelor din "Sistemului de Proiecție Stereografică 1970" în "Sistemul Stereografic Local":

$$c = \frac{U}{0.99975} = \frac{0.999251}{0.99975} = 0.999501 \quad (5.80)$$

f. Calculul coordonatele punctelor rețelei în "Sistemul de Proiecție Stereografic Local":

$$X_L^i = 500000 + x_{70}^i * c$$
$$Y_L^i = 500000 + y_{70}^i * c \quad (5.81)$$

în care:

$$x^i_{70} = X^i_{70} - 500000$$
$$Y^i_{70} = Y^i_{70} - 500000 \qquad (5.82)$$

Transcalculul coordonatelor din "Sistemul Stereografic 1970" în "Sistemul Stereografic Local"

Tabelul 5-16

Nr. pct.	Coordonate sistem STEREOGRAFIC 1970		X^i_{70} [m]	x^i_{70} [m]	Coordonate sistem STEREOGRAFIC LOCAL	
	X [m]	Y [m]			X [m]	Y [m]
C001	297003,977	783580,952	-202996,023	283580,952	297105,312	783439,389
C002	297197,402	783866,966	-202802,598	283866,966	297298,640	783725,261
C003	296913,874	784604,035	-203086,126	284604,035	297015,254	784461,962
C004	296677,799	784202,929	-203322,201	284202,929	296779,297	784061,056

6. REȚELE DE RIDICARE

6.1. RETELE DE RIDICARE PLANIMETRICA. CLASIFICĂRI.

Metoda drumuirii este un procedeu de îndesire a rețelei geodezice în vederea ridicării detaliilor topografice din teren.

Drumuirea este o linie poligonală frântă, în care poziția reciprocă a punctelor este determinată prin măsurători de distanțe între punctele de frângere și măsurători unghiulare în punctele de frângere ale traseului poligonal.

Când în teren s-au efectuat doar măsurători pentru stabilirea poziției reciproce a punctelor din traseul poligonal, vorbim despre drumuire liberă. De cele mai multe ori însă, traseul poligonal se sprijină la capete pe puncte de coordonate cunoscute – drumuiri constrânse sau drumuiri sprijinite – care permit ca punctele de drumuire să fie determinate într-un anumit sistem de coordonate. În această situație, ultima latură a traseului poligonal reprezintă o supradeterminare, care permite un control al elementelor măsurate în teren. Controlul elementelor măsurate devine și mai concludent dacă în punctele de coordonate cunoscute pe care se sprijină drumuirea, se măsoară suplimentar direcții spre alte puncte de coordonate cunoscute, fiecare direcție măsurată reprezintă un alt element de control.

În funcție de elementele de constrângere de care se dispune în teren, dar și de obiectivele topografice care trebuie ridicate, există mai multe tipuri de clasificări ale drumuirilor.

1. Clasificarea drumuirilor în funcție de elementele de sprijin:

a. - drumuire liberă (neconstrânsă) (fig. 6.1);

b. - drumuire sprijinită la capete numai pe puncte de coordonate cunoscute (fig.6.2);

c. - drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute și laturi cu orientări cunoscute (fig. 6.3);

d. - drumuire cu punct nodal (fig. 6.4).

În multe situații, drumuirile se pot sprijini la capete pe puncte din alte drumuiri, constituindu-se în așa-numitele rețele poligonale. În această situație este justificată introducerea noțiunii de „ordinul drumuirii" și anume (fig. 6.5.):

a. - traseul A-201-...-206-B – drumuire principală;

b. - traseul 202-301-...-304-C – drumuire secundară;

c. - traseul 205-401-...-403-303 – drumuire terțiară.

Ordine inferioare drumuirii terțiare nu sunt admise.

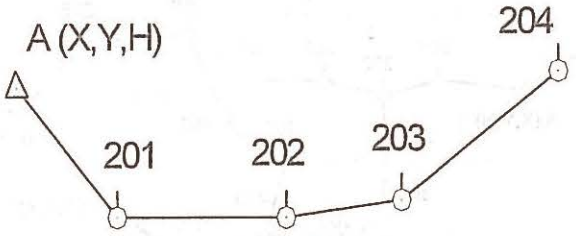


Figura 6.1
Drumuire liberă

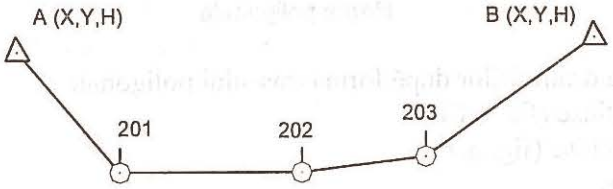


Figura 6.2
Drumuire sprijinită la capete numai pe puncte de coordonate cunoscute

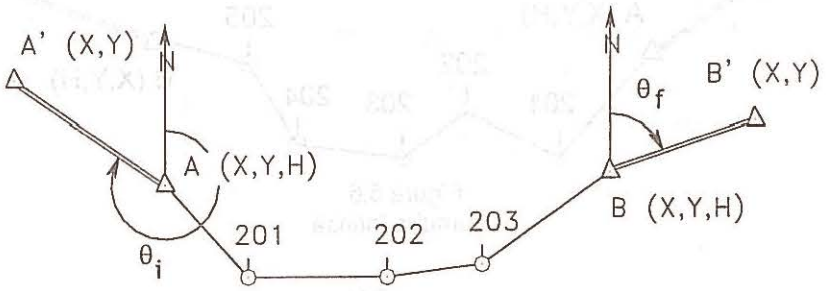


Figura 6.3
Drumuire sprijinită la capete
pe puncte de coordonate cunoscute şi laturi cu orientări cunoscute

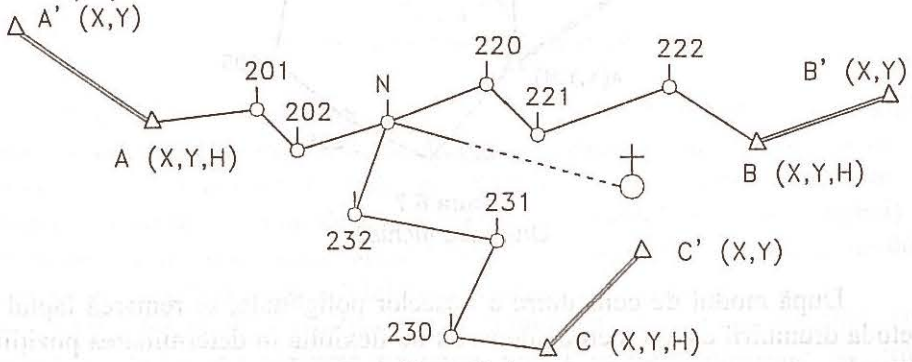


Figura 6.4
Drumuire cu punct nodal

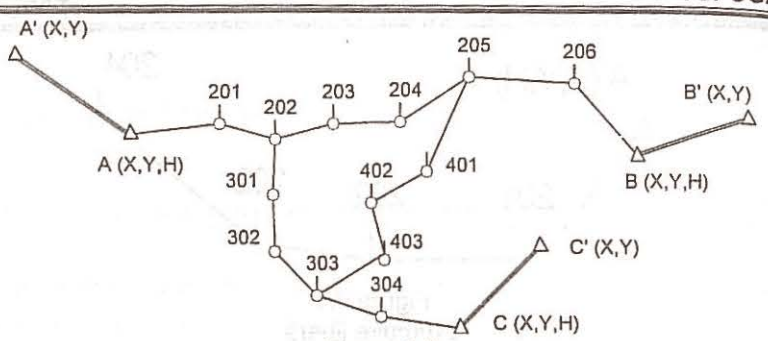


Figura 6.5
Rețea poligonală

2. Clasificarea drumuirilor după forma traseului poligonal:
a. drumuiri întinse (fig. 6.6),
b. drumuiri închise (fig. 6.7).

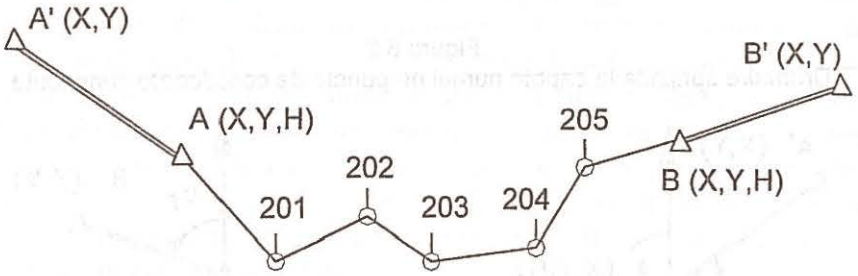


Figura 6.6
Drumuire întinsă

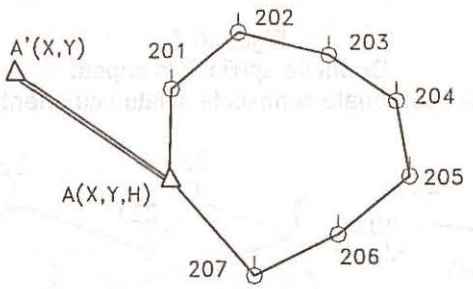


Figura 6.7
Drumuire închisă

După modul de constituire a traseelor poligonale, se remarcă faptul c metoda drumuirii este o metodă deosebit de flexibilă în determinarea poziții punctelor din teren, fără să necesite cheltuieli mari pentru marcarea semnalizarea punctelor.

6.2. PROIECTAREA REȚELELOR DE DRUMUIRI

Condiții de proiectare a rețelelor de drumuiri:

1. - traseul drumuirilor se proiectează de regulă de-a lungul arterelor de circulație, cursurilor de apă, etc., întrucât laturile și punctele drumuirii trebuie să fie ușor accesibile;
2. - punctele de drumuire se amplasează în locuri ferite de distrugere, în care instalarea instrumentelor topografice se face cu ușurință;
3. - între punctele de drumuire învecinate trebuie să existe vizibilitate perfectă pentru ca direcțiile și lungimile să se măsoare fără dificultate;
4. - punctele de drumuire se aleg în apropierea detaliilor care urmează să fie ridicate.

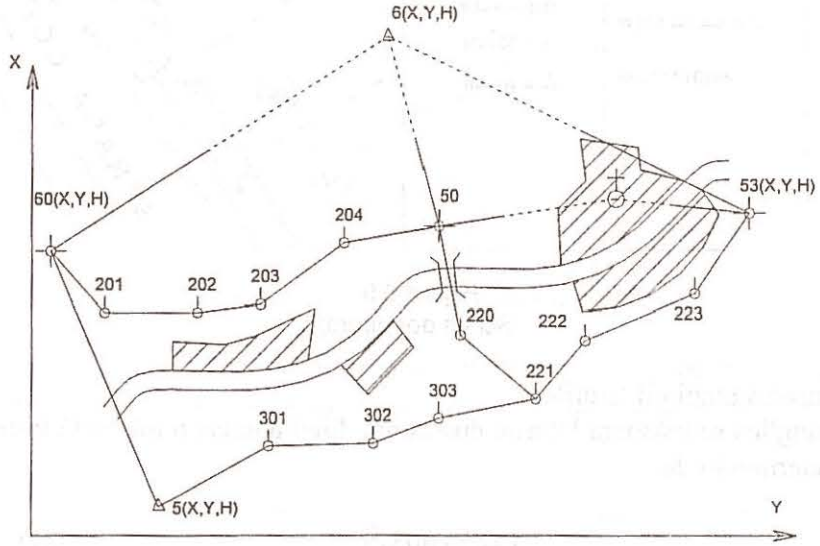


Figura 6.8
Proiectarea rețelelor de drumuiri

Distanța între punctele de drumuire este determinată de condițiile concrete din teren, de gradul de acoperire cu vegetație sau cu construcții, de scopul ridicării topografice și de aparatura topografică avută în dotare. În situația în care se dispune de aparatură clasică (teodolite, mire, panglici) se recomandă ca lungime medie latura de 100 - 150 m, lungimea minimă de 40 – 50 m, iar cea maximă 2000 – 3000 m (pentru aparatura clasică).

Atât lungimea laturilor cât și lungimea traseului poligonal sunt dependente de situația concretă din teren. Astfel, în zone construite, lungimea laturilor cât și lungimea drumuirii vor fi mai reduse decât în zone de extravilan.

6.2.1. Operații de teren

1. Marcarea punctelor de drumuire – se face de regulă cu țăruși, în localități cu țăruși metalici cherneruiți, iar în afara localităților cu țăruși de lemn.
2. Întocmirea schițelor de reperaj și descrierea topografică a punctelor.

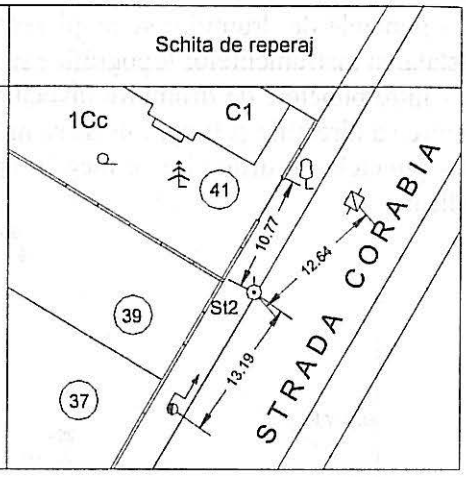
Nr. Pct.	Coordonate (m) X / Y	Materializare in teren	Schita de reperaj
St 2	X = 554300.101 m Y = 346018.112 m	Bulon metalic L = 80 mm ϕ = 10 mm	

Figura 6.9
Schița de reperaj

3. Măsurarea lungimii laturilor:
a. cu panglica se măsoară laturile dus-întors, fiind admisă o toleranță între cele două determinări de:

$$T = \pm 0{,}003\sqrt{L} \qquad (6.1)$$

b. cu aparatură electro – optică distanțele se măsoară dus – întors, eroarea de măsurare admisă fiind în funcție de precizia instrumentului folosit (de regulă nu trebuie să depășească $2\text{-}3p_e$, unde p_e = precizia de măsurare a instrumentului);

$$L_{ij} = \frac{L_{ij} + L_{ji}}{2} \qquad (6.2)$$

4. Măsurarea unghiurilor verticale.

Unghiurile verticale se măsoară în fiecare punct de stație în ambele poziții ale lunetei, atât spre punctul din spate, cât și spre punctul din față al traseului poligonal. Când vizarea se face la înălțimea instrumentului în ambele

sensuri, se va face media determinărilor, luându-se sensul unghiului vertical în sensul de parcurgere al drumuirii (fig. 6.10).

$$\alpha = \frac{|\alpha_{AB}| + |\alpha_{BA}|}{2} \qquad (6.3)$$

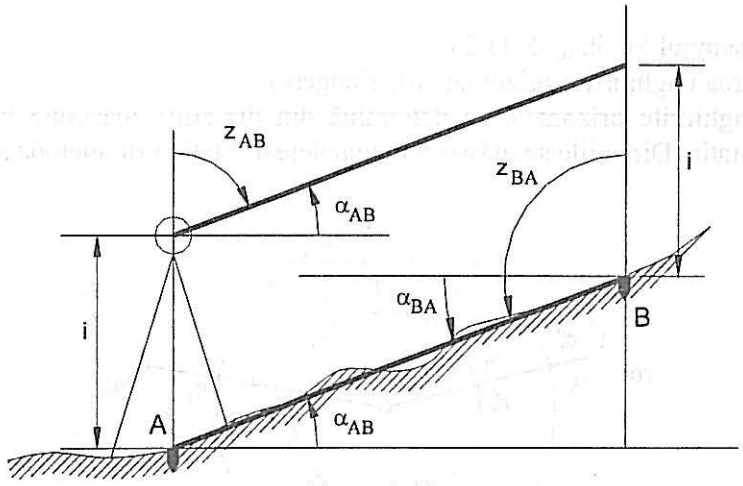


Figura 6.10
Măsurarea unghiurilor verticale.
Axa de vizare paralelă cu linia terenului

Când vizarea se face la înălțimi diferite (situație destul de frecvent întâlnită în teren), medierea se poate realiza numai la diferențele de nivel determinate în ambele sensuri.

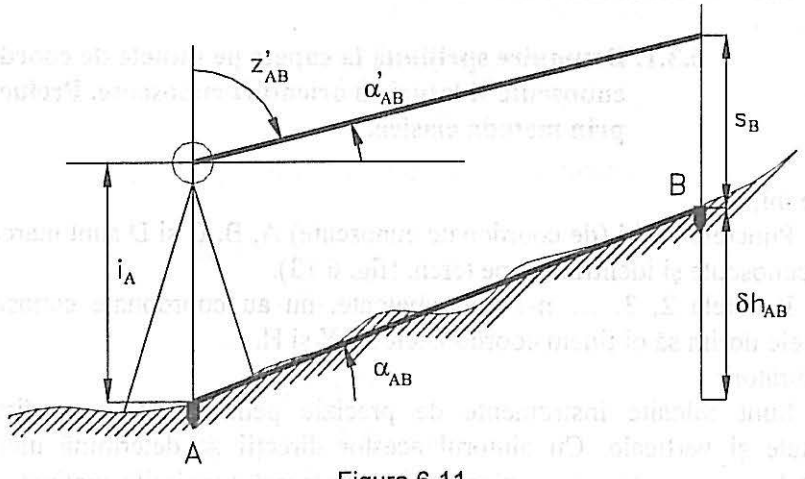


Figura 6.11
Măsurarea unghiurilor verticale.
Axa de vizare nu este paralelă cu linia terenului

$$\delta h_{AB} = d * tg\alpha'_{AB} + i_A - s_B, \text{ ascendent}$$
$$\delta h_{BA} = d * tg\alpha'_{BA} - i_B + s_A, \text{ descendent} \qquad (6.4)$$
$$|\delta h_{AB}| = \frac{|\delta h_{AB}| + |\delta h_{BA}|}{2}$$

dându-se semnul lui δh_{AB} de la dus.

5. Măsurarea unghiurilor orizontale (de frângere).

Unghiurile orizontale se determină din direcțiile măsurate în fiecare punct de stație. Direcțiile se măsoară în punctele de stație prin metoda seriilor.

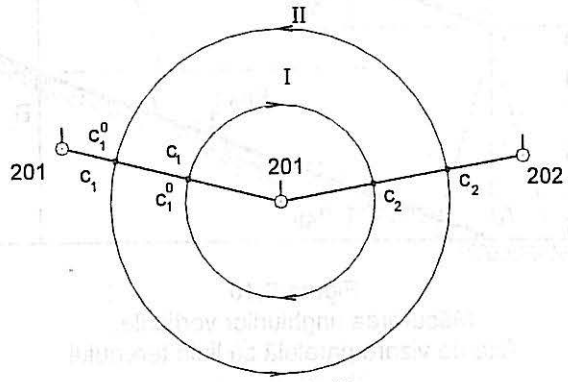


Figura 6.12
Modul de măsurare a unghiurilor orizontale

6.3. *DRUMUIRI PLANIMETRICE*

6.3.1. Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute şi laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea prin metoda clasică.

1. Date inițiale:

Punctele vechi (de coordonate cunoscute) A, B, C şi D sunt marcate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. (fig. 6.13).

Punctele 2, 3, ... n-1 sunt marcate, nu au coordonate cunoscute şi pentru ele dorim să obținem coordonatele X, Y şi H.

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie pentru măsurarea direcțiilor orizontale şi verticale. Cu ajutorul acestor direcții se determină unghiurile orizontale ω_i şi unghiurile verticale α_i. Se măsoară lungimile înclinate L_{ij} ale laturilor de drumuire direct cu panglica sau stadimetric.

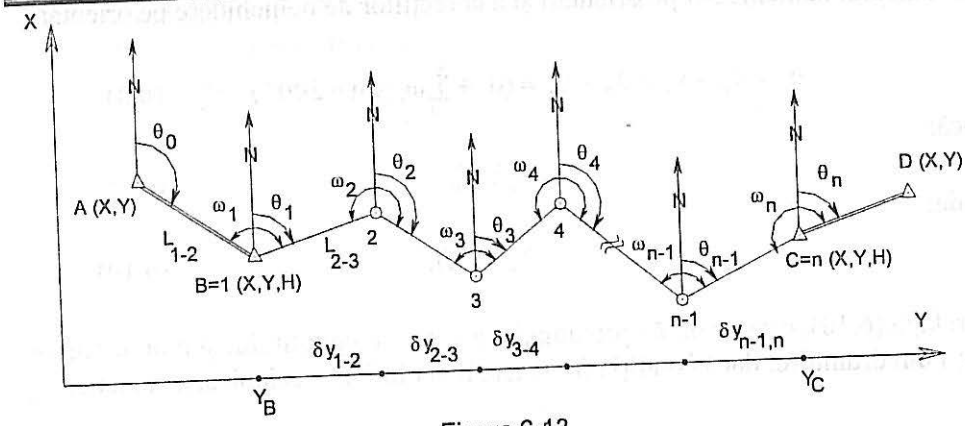


Figura 6.13
Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute şi laturi cu orientări cunoscute. Prelucrare prin metoda clasică

2. Etape de calcul:

a. Calculul distanţelor orizontale

$$D_{ij} = L_{ij} * \cos\alpha_{ij} \tag{6.5}$$

b. Calculul orientărilor şi compensarea lor

b1. Calculul orientărilor laturilor de sprijin

$$\theta_{BA} = \theta_i = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{BA}}{\Delta X_{BA}} = \text{arctg}\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}$$
$$\theta_{CD} = \theta_f = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{CD}}{\Delta X_{CD}} = \text{arctg}\frac{Y_D - Y_C}{X_D - X_C} \tag{6.6}$$

b2. Calculul orientărilor provizorii ale laturilor de drumuire

$$\begin{aligned}
&\theta'_1 = \theta_i \pm 200^G + \omega_1 \\
&\theta'_2 = \theta'_1 \pm 200^G + \omega_2 \\
&\text{- - - - - - - - - - - - - -} \\
&\theta'_{n-1} = \theta'_{n-2} \pm 200^G + \omega_{n-1} \\
&\underline{\theta'_n = \theta'_{n-1} \pm 200^G + \omega_n} \\
&\theta'_n = \theta'_i + \sum_{i=1}^{n}\omega_i \pm n * 200^G
\end{aligned} \tag{6.7}$$

b3. Calculul neînchiderii pe orientări şi a corecţiilor de neînchidere pe orientări

$$e_\theta = v_e - v_j = \theta'_n - \theta_f = (\theta_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \pm n * 200^G) - \theta_f \quad (6.8)$$

dacă:

$$e_\theta \leq T_\theta \quad (6.9)$$

unde:

$$T_\theta = c\sqrt{n} \quad (6.10)$$

în relaţia (6.10), c reprezintă aproximaţia de citire a teodolitului şi n numărul de staţii din drumuire, dacă condiţia (6.9) este îndeplinită se calculează corecţia:

$$c_\theta = v_j - v_e = -e_\theta \quad (6.11)$$

b4. Calculul corecţiei unitare pentru orientări

$$q_\Theta = \frac{c_\Theta}{n} \quad (6.12)$$

b5. Calculul orientărilor definitive

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta'_1 + q_\Theta \\ \theta_2 &= \theta'_2 + 2q_\Theta \\ &\text{----------} \\ \theta_{n-1} &= \theta'_{n-1} + (n-1)q_\Theta \\ \theta_n &= \theta'_n + nq_\Theta \end{aligned} \quad (6.13)$$

pentru control se verifică dacă θ_n compensat = θ_f calculat din coordonate

d. Calculul coordonatelor relative şi compensarea lor

d1. Calculul coordonatelor relative provizorii

$$\begin{array}{lll} \delta x'_{1,2} = d_{1,2}\cos\theta_1 & \delta y'_{1,2} = d_{1,2}\sin\theta_1 & \delta hy_{1,2} = d_{1,2}tg\alpha_1 \\ \delta x'_{2,3} = d_{2,3}\cos\theta_2 & \delta y'_{2,3} = d_{2,3}\sin\theta_2 & \delta hy_{2,3} = d_{2,3}tg\alpha_2 \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\ \underline{\delta x'_{n-1,n} = d_{n-1,n}\cos\theta_{n-1}} & \underline{\delta y'_{n-1,n} = d_{n-1,n}\sin\theta_{n-1}} & \underline{\delta hy_{n-1,n} = d_{n-1,n}tg\alpha_{n-1}} \\ \sum \delta x'_{ij} = \sum d_{ij}\cos\theta_i & \sum \delta y'_{ij} = \sum d_{ij}\sin\theta_i & \sum \delta y'_{ij} = \sum d_{ij}tg\alpha_i \end{array} \quad (6.14)$$

d2. Calculul neînchiderilor pe creşterile de coordonate şi a corecţiilor de neînchidere pe creşterile de coordonate

$$\begin{aligned} e_x &= v_e - v_j = \sum \delta x'_{ij} - \Delta X_{BC} = \sum \delta x'_{ij} - (X_C - X_B) \\ e_y &= v_e - v_j = \sum \delta y'_{ij} - \Delta Y_{BC} = \sum \delta y'_{ij} - (Y_C - Y_B) \\ e_h &= v_e - v_j = \sum \delta h'_{ij} - \Delta H_{BC} = \sum \delta h'_{ij} - (H_C - H_B) \end{aligned} \qquad (6.15)$$

se calculează eroarea planimetrică totală:

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \qquad (6.16)$$

dacă:

$$\begin{aligned} e &\le T \\ e_h &\le T_h \end{aligned} \qquad (6.17)$$

unde T şi T_h sunt:

$$T = \pm\left(0{,}003\sqrt{\sum D_{ij}} + \frac{\sum D_{ij}}{5000}\right), \text{pentru intravilan si terenuri cu panta} < 5^g;$$

$$T = \pm\left(0{,}0045\sqrt{\sum D_{ij}} + \frac{\sum D_{ij}}{1733}\right), \text{pentru extravilan si terenuri cu panta} > 5^g; \qquad (6.18)$$

$$T_h = 0{,}2\sqrt{\sum D_{ij[km]}}.$$

Dacă condiţiile (6.19) sunt îndeplinite se calculează corecţiile c_x, c_y şi c_h.

$$\begin{aligned} c_x &= v_j - v_e = -e_x \\ c_y &= v_j - v_e = -e_y \\ c_h &= v_j - v_e = -e_h \end{aligned} \qquad (6.19)$$

d3. Calculul corecţiilor unitare

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{c_x}{\sum D_{ij}}\,[\text{mm}/100\,\text{m}] \\ k_y &= \frac{c_y}{\sum D_{ij}}\,[\text{mm}/100\,\text{m}] \\ k_h &= \frac{c_h}{\sum D_{ij}}\,[\text{mm}/100\,\text{m}] \end{aligned} \qquad (6.20)$$

e. Calculul coordonatelor relative compensate

$$q_{x_{1,2}} = k_x * d_{1,2} \qquad q_{y_{1,2}} = k_y * d_{1,2} \qquad q_{h_{1,2}} = k_h * d_{1,2}$$
$$q_{x_{2,3}} = k_x * d_{2,3} \qquad q_{y_{2,3}} = k_y * d_{2,3} \qquad q_{h_{2,3}} = k_h * d_{2,3}$$
$$\text{---------- (6.21)}$$
$$\underline{q_{x_{n-1,n}} = k_x * d_{n-1,n}} \qquad \underline{q_{y_{n-1,n}} = k_y * d_{n-1,n}} \qquad \underline{q_{h_{n-1,n}} = k_h * d_{n-1,n}}$$
$$\sum q_{x_{ij}} = k_x * \sum d_{ij} = c_x \qquad \sum q_{y_{ij}} = k_y * \sum d_{ij} = c_y \qquad \sum q_{h_{ij}} = k_h * \sum d_{ij} = c_h$$

$$\delta x_{1,2} = \delta x'_{1,2} + q_{x_{1,2}} \qquad \delta y_{1,2} = \delta y'_{1,2} + q_{y_{1,2}} \qquad \delta h_{1,2} = \delta h'_{1,2} + q_{h_{1,2}}$$
$$\delta x_{2,3} = \delta x'_{2,3} + q_{x_{2,3}} \qquad \delta y_{2,3} = \delta y'_{2,3} + q_{y_{2,3}} \qquad \delta h_{2,3} = \delta h'_{2,3} + q_{h_{2,3}}$$
$$\text{---------- ---------- ---------- (6.22)}$$
$$\underline{\delta x_{n-1,n} = \delta x'_{n-1,n} + q_{x_{n-1,n}}} \qquad \underline{\delta y_{n-1,n} = \delta y'_{n-1,n} + q_{y_{n-1,n}}} \qquad \underline{\delta h_{n-1,n} = \delta h'_{n-1,n} + q_{h_{n-1,n}}}$$
$$\sum \delta x_{ij} = \sum \delta x_i' + c_x = X_C - X_B \quad \sum \delta y_{ij} = \sum \delta y_i' + c_y = Y_C - Y_B \quad \sum \delta h_{ij} = \sum \delta h_i' + c_h = H_C - H_B$$

f. Calculul coordonatelor absolute ale punctelor de drumuire

$$X_2 = X_1 + \delta x_{1,2} \qquad Y_2 = Y_1 + \delta y_{1,2} \qquad H_2 = H_1 + \delta h_{1,2}$$
$$X_3 = X_2 + \delta x_{2,3} \qquad Y_3 = Y_2 + \delta y_{2,3} \qquad H_3 = H_2 + \delta h_{2,3} \qquad (6.23)$$
$$\text{---------- ---------- ----------}$$
$$X_n = X_{n-1} + \delta x_{n-1,n} = X_C \quad Y_n = Y_{n-1} + \delta y_{n-1,n} = Y_C \quad H_n = H_{n-1} + \delta h_{n-1,n} = H_C$$

Acest mod de abordare conduce la modificarea geometriei traseului prin compensarea orientărilor. Unghiurile şi orientările din punctele de sprijin influenţează cu imprecizia lor tot calculul de compensare.

6.3.1.1. Exemplu. Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute şi laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea prin metoda clasică.

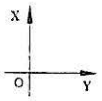
1. Date iniţiale:

a. - unghiurile ω_i măsurate pe teren prin metoda seriilor, tabel 6-3, coloana 6;
b. - lungimile laturilor L_{ij} măsurate cu panglica dus-întors, tabel 6-3, coloana 3;
c. - unghiurile verticale α_i, tabel 6-3, coloana 4.

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 8, 62, 63, 4
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 6-1

Nr. pct.	X [m]	Y [m]	H [m]
8	5343.18	3926.00	-
62	3745.60	3838.07	404.98
63	3863.84	4348.32	429.37
4	5750.36	5988.76	-



2. Schița vizelor:

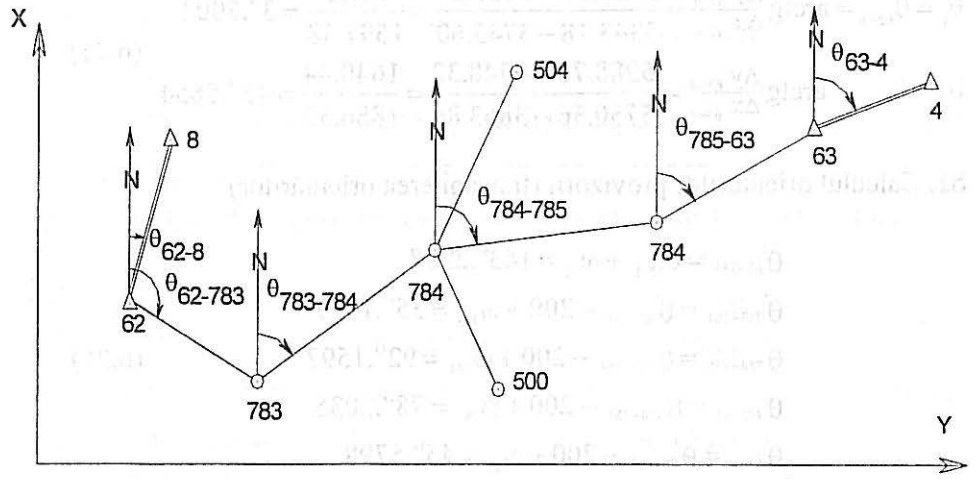


Figura 6.14
Drumuire sprijinită la capete pe puncte
de coordonate cunoscute şi laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea clasică

3. Măsurători:

Direcțiile orizontale compensate în stație, centrate şi reduse

Tabelul 6-2

PS	PV	Direcții măsurate [g c cc]
84	783	354.1100
	785	211.0700
	500	294.3800
	504	164.8200

4. Etape de calcul:

a. Calculul distanțelor orizontale

$$\begin{aligned} D_{62-783} &= L_{62-783}\cos\alpha_{62-783} = 148.13 * \cos 16.0900 = 143.42\text{m} \\ D_{783-784} &= L_{783-784}\cos\alpha_{783-784} = 153.32 * \cos 5.0400 = 152.83\text{m} \\ D_{784-785} &= L_{784-785}\cos\alpha_{784-785} = 153.83 * \cos -4.3100 = 153.48\text{m} \\ D_{785-63} &= L_{785-63}\cos\alpha_{785-63} = 176.97 * \cos -5.2200 = 176.37\text{m} \end{aligned} \quad (6.24)$$

b. Calculul orientărilor și compensarea lor

b1. Calculul orientărilor de sprijin

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_{62-8} = \text{arctg}\frac{\Delta y_{62-8}}{\Delta x_{62-8}} = \frac{3926.00-3838.07}{5343.18-3745.60} = \frac{87.93}{1597.58} = 3^G.5004 \\ \theta_f &= \theta_{63-4} = \text{arctg}\frac{\Delta y_{63-4}}{\Delta x_{63-4}} = \frac{5988.76-4348.32}{5750.36-3863.84} = \frac{1640.44}{1886.52} = 45^G.5654 \end{aligned} \quad (6.25)$$

b2. Calculul orientărilor provizorii (transmiterea orientărilor)

$$\begin{aligned} \theta'_{62-783} &= \theta_{62-8} + \omega_{62} = 143^G.2997 \\ \theta'_{783-784} &= \theta'_{62-783} - 200 + \omega_{783} = 35^G.1997 \\ \theta'_{784-785} &= \theta'_{783-784} - 200 + \omega_{784} = 92^G.1597 \\ \theta'_{785-63} &= \theta'_{784-785} - 200 + \omega_{785} = 78^G.2035 \\ \theta'_{63-4} &= \theta'_{785-63} - 200 + \omega_{63} = 45^G.5798 \end{aligned} \quad (6.26)$$

b3. Calculul corecției pe orientări

$$e_\theta = v_e - v_j = \theta'_f - \theta_f = \theta'_{63-4} - \theta_{63-4} = 1^c 44^{cc} \quad (6.27)$$

$$T_\theta = 150^{cc}\sqrt{n} = 150\sqrt{5} = 3^c 35^{cc} \quad (\text{Theo}0.20) \quad (6.28)$$

$$T_\theta = 50^{cc}\sqrt{n} = 50\sqrt{5} = 1^c 11^{cc} \quad (\text{Theo}0.10)$$

$$e_\theta \le T_\theta \quad (6.29)$$

$$c_\theta = v_j - v_e = -e_\theta = -1^c 44^{cc} \quad (6.30)$$

b4. Calculul corecției unitare

$$q_\Theta = \frac{c_\Theta}{n} = -28^{cc}.8 \quad (6.31)$$

b5. Calculul orientărilor definitive

$$\theta_{62-783} = \theta'_{62-783} + q_\Theta = 143.2997 + (-0.0003) = 143^G.2994$$
$$\theta_{783-784} = \theta'_{783-784} + 2q_\Theta = 35.1997 + (2 * -0.0003) = 35^G.1991$$
$$\theta_{784-785} = \theta'_{784-785} + 3q_\Theta = 92.1597 + (3 * -0.0003) = 92^G.1588 \quad (6.32)$$
$$\theta_{785-63} = \theta'_{785-63} + 4q_\Theta = 78.2035 + (4 * -0.0003) = 78^G.1920$$
$$\theta_f = \theta_{63-4} = \theta'_{63-4} + 5q_\Theta = 45.5654 \text{ (Control)}$$

c. Calculul coordonatelor relative

c1. Calculul coordonatelor relative provizorii

$$\delta x'_{62-783} = D_{62-783} \cos\theta_{62-783} = 143.42 * \cos 143.2924 = -90.198m$$
$$\delta x'_{783-784} = D_{783-784} \cos\theta_{783-784} = 152.83 * \cos 35.1991 = 130.059m$$
$$\delta x'_{784-785} = D_{784-785} \cos\theta_{784-785} = 153.84 * \cos 92.1588 = 18.856m \quad (6.33)$$
$$\delta x'_{785-63} = D_{785-63} \cos\theta_{785-63} = 176.37 * \cos 78.1920 = 59.242m$$
$$\sum \delta x'_{ij} = \sum D_{ij} \cos\theta_{ij} = (-90.198) + 130.059 + 18.856 + 59.242 = 117.959m$$

$$\delta y'_{62-783} = D_{62-783} \sin\theta_{62-783} = 143.42 * \sin 143.2924 = 111.506m$$
$$\delta y'_{783-784} = D_{783-784} \sin\theta_{783-784} = 152.83 * \sin 35.1991 = 80.260m$$
$$\delta y'_{784-785} = D_{784-785} \sin\theta_{784-785} = 153.84 * \sin 92.1588 = 152.317m \quad (6.34)$$
$$\delta y'_{785-63} = D_{785-63} \sin\theta_{785-63} = 176.37 * \sin 78.1920 = 166.123m$$
$$\sum \delta y'_{ij} = \sum D_{ij} \sin\theta_{ij} = 111.506 + 80.260 + 152.317 + 166.123 = 510.206m$$

$$\delta h'_{62-783} = D_{62-783} tg\alpha_{62-783} = 143.42 * tg 16.0900 = 37.040m$$
$$\delta h'_{783-784} = D_{783-784} tg\alpha_{783-784} = 152.83 * tg 5.0400 = 12.125m$$
$$\delta h'_{784-785} = D_{784-785} tg\alpha_{784-785} = 153.84 * tg(-4.3100) = -10.407m \quad (6.35)$$
$$\delta h'_{785-63} = D_{785-63} tg\alpha_{785-63} = 176.37 * tg(-5.2200) = -14.494m$$
$$\sum \delta h'_{ij} = \sum D_{ij} tg\alpha_{ij} = 37.040 + 12.125 + (-10.407) + (-14.494) = 24.264m$$

c2. Calculul erorilor de neînchidere

$$e_x = -(X_{63} - X_{62}) + \sum \delta x'_{ij} = -(3863.84 - 3745.60) + 117.959 = 0.281m$$
$$e_y = -(Y_{63} - Y_{62}) + \sum \delta y'_{ij} = -(4348.32 - 3838.07) + 510.206 = 0.044m \quad (6.36)$$
$$e_h = -(H_{63} - H_{62}) + \sum \delta h'_{ij} = -(426.37 - 404.98) + 24.26 = 0.126m$$

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \sqrt{(-0.281)^2 + (-0.044)^2} = 0.284\text{m} \qquad (6.37)$$

$$\sum D_{ij} = D_{62-783} + D_{783-784} + D_{784-785} + D_{785-63} = \\ = 143.42 + 152.83 + 153.48 + 176.37 = 626.10\text{m} \qquad (6.38)$$

$$T = \pm\left(0.0045\sqrt{\sum D} + \frac{\sum D}{1733}\right) = \pm\left(0.0045\sqrt{626.10} + \frac{626.10}{1733}\right) = 0.473\text{m} \qquad (6.39)$$

$$T_h = 0.2\sqrt{\sum D_{[km]}} = 0.2\sqrt{0.626} = 0.158\text{m}$$

$$e \le T \\ e_h \le T_h \qquad (6.40)$$

$$c_x = -e_x = -(-0.281) = 0.281\text{m} \\ c_y = e_y = -(-0.044) = 0.044\text{m} \qquad (6.41) \\ c_h = e_h = -(-0.126) = 0.126\text{m}$$

c3. Calculul corecțiilor unitare

$$k_x = \frac{c_x}{\sum D_{ij}} = \frac{0.281}{626.10} = \frac{281[\text{mm}]}{6.2610} = 45[\text{mm}/100\,\text{m}] \\ k_y = \frac{c_y}{\sum D_{ij}} = \frac{0.044}{626.10} = \frac{44[\text{mm}]}{6.2610} = 7[\text{mm}/100\,\text{m}] \qquad (6.42) \\ k_h = \frac{c_h}{\sum D_{ij}} = \frac{0.126}{62610} = \frac{126[\text{mm}]}{6.2610} = 20[\text{mm}/100\,\text{m}]$$

c4. Calculul coordonatelor relative compensate

$$\delta x_{62-783} = \delta x'_{62-783} + k_x * D_{62-783} = -90.198 + 45 * 1.4342 = -90.134\text{m} \\ \delta x_{783-784} = \delta x'_{783-784} + k_x * D_{783-784} = 130.059 + 45 * 1.5283 = 130.128\text{m} \\ \delta x_{784-785} = \delta x'_{784-785} + k_x * D_{784-785} = 18.856 + 45 * 1.5348 = 18.925\text{m} \qquad (6.43) \\ \delta x_{785-63} = \delta x'_{785-63} + k_x * D_{785-63} = 59.242 + 45 * 1.7637 = 59.321$$

$$\sum \delta x = X_{63} - X_{62} \Rightarrow -90.134 + 130.128 + 18.925 + 59.321 = \\ = 3863.84 - 3745.60 \Rightarrow 118.240\text{m} = 118.240\text{m} \quad \text{control} \qquad (6.44)$$

$$\delta y_{62-783} = \delta y'_{62-783} + k_y * D_{62-783} = 111.506 + 7 * 1.4342 = 111.516m$$
$$\delta y_{783-784} = \delta y'_{783-784} + k_y * D_{783-784} = 80.260 + 7 * 1.5283 = 80.271m$$
$$\delta y_{784-785} = \delta y'_{784-785} + k_y * D_{784-785} = 152.317 + 7 * 1.5348 = 152.328m \quad (6.45)$$
$$\delta y_{785-63} = \delta y'_{785-63} + k_y * D_{785-63} = 166.123 + 7 * 1.7637 = 166.135m$$

$$\sum \delta y = Y_{63} - Y_{62} \Rightarrow 111.516 + 80.271 + 152.328 + 166.135 =$$
$$= 4348.32 - 3838.07 \Rightarrow 510.25m = 510.25m \quad \text{control} \quad (6.46)$$

$$\delta h_{62-783} = \delta h'_{62-783} + k_h * D_{62-783} = 37.040 + 20 * 1.4342 = 37.069m$$
$$\delta h_{783-784} = \delta h'_{783-784} + k_h * D_{783-784} = 12.125 + 20 * 152.83 = 12.155m$$
$$\delta h_{784-785} = \delta h'_{784-785} + k_h * D_{784-785} = -10.407 + 20 * 1.5348 = -10.376m \quad (6.47)$$
$$\delta h_{785-63} = \delta h'_{785-63} + k_h * D_{785-63} = -14.494 + 20 * 1.7637 = -14.458m$$

$$\sum \delta h = H_{63} - H_{62} \Rightarrow 37.069 + 12.155 + (-10.376) + (-14.458) =$$
$$= 429.37 - 404.98 \Rightarrow 24.39m = 24.39m \quad \text{control} \quad (6.48)$$

d. Calculul coordonatelor absolute

$$X_{783} = X_{62} + \delta x_{62-783} = 3745.60 + (-90.134) = 3655.466m$$
$$X_{784} = X_{783} + \delta x_{783-784} = 3655.466 + 130.128 = 3785.594m$$
$$X_{785} = X_{784} + \delta x_{784-785} = 3785.594 + 18.925 = 3804.519m \quad (6.49)$$
$$X_{63} = X_{785} + \delta x_{785-63} = 3804.519 + 59.321 = 3863.840m \quad \text{control}$$

$$Y_{783} = Y_{62} + \delta y_{62-783} = 3838.07 + 111.516 = 3949.586m$$
$$Y_{784} = Y_{783} + \delta y_{783-784} = 3949.586 + 80.271 = 4029.857m$$
$$Y_{785} = Y_{784} + \delta y_{784-785} = 4029.857 + 152.328 = 4182.185m \quad (6.50)$$
$$Y_{63} = Y_{785} + \delta y_{785-63} = 4182.185 + 166.135 = 4348.32m \quad \text{control}$$

$$H_{783} = H_{62} + \delta h_{62-783} = 404.98 + 37.069 = 442.039m$$
$$H_{784} = H_{783} + \delta h_{783-784} = 442.039 + 12.155 = 454.194m$$
$$H_{785} = H_{784} + \delta h_{784-785} = 454.194 + (-10.376) = 443.818m \quad (6.51)$$
$$H_{63} = H_{785} + \delta h_{785-63} = 443.818 + (-14.458) = 429.370m \quad \text{control}$$

e. Calculul coordonatelor punctelor radiate

e1. Calculul unghiurilor α' şi α" de orientare a staţiei 784

$$\alpha' = \theta_{784-783} - dir_{783} = 281.0891$$
$$\alpha'' = \theta_{784-785} - dir_{785} = 281.0888 \quad (6.52)$$

e2. Calculul ponderilor

$$p_1 = D_{784-783}[km] = 0.1528$$
$$p_2 = D_{784-785}[km] = 0.1535 \quad (6.53)$$

e3. Calculul unghiului de orientare al staţiei 784 ca medie ponderată

$$\alpha = \frac{\alpha' * p_1 + \alpha'' * p_2}{p_1 + p_2} = \frac{281.0891 * 0.1528 + 281.0888 * 0.1535}{0.1528 + 0.1535} = 281^G.0889 \quad (6.54)$$

e4. Calculul orientărilor de la staţia 784 la punctele radiate

$$\theta_{784-500} = \alpha_{784} + dir_{500} = 281.089 + 294.3800 - 400 = 175^G.4689$$
$$\theta_{784-504} = \alpha_{784} + dir_{504} = 281.089 + 164.8200 - 400 = 45^G.9089 \quad (6.55)$$

e5. Calculul distanţelor orizontale de la staţia 784 la punctele radiate

$$D_{784-500} = L_{784-500} * \cos\alpha_{784-500} = 56.70 * \cos(-1.0300) = 56.69m$$
$$D_{784-504} = L_{784-504} * \cos\alpha_{784-504} = 55.91 * \cos(-4.3900) = 55.77m \quad (6.56)$$

e6. Calculul creşterilor de coordonate de la staţia 784 la punctele radiate

$$\delta x_{784-500} = D_{784-500} * \cos\theta_{784-500} = 56.69 * \cos 175.4689 = -52.53m$$
$$\delta x_{784-504} = D_{784-504} * \cos\theta_{784-504} = 55.77 * \cos 45.9089 = 41.89m \quad (6.57)$$

$$\delta y_{784-500} = D_{784-500} * \sin\theta_{784-500} = 56.69 * \sin 175.4689 = 21.81m$$
$$\delta y_{784-504} = D_{784-504} * \sin\theta_{784-504} = 55.77 * \sin 45.9089 = 36.82m \quad (6.58)$$

$$\delta h_{784\text{-}500} = D_{784\text{-}500} * tg\alpha_{784\text{-}500} = 56.70 * tg(-1.0300) = -0.91m$$
$$\delta h_{784\text{-}504} = D_{784\text{-}504} * \qquad (6.59)$$
$$tg\alpha_{784\text{-}504} = 55.91 * tg(-4.3900) = -3.85m$$

e7. Calculul coordonatelor absolute pentru punctele radiate

$$X_{500} = X_{784} + \delta x_{784\text{-}500} = 3785.594 + (-52.53) = 3733.064m \qquad (6.60)$$
$$X_{504} = X_{784} + \delta x_{784\text{-}504} = 3785.594 + 41.89 = 3827.484m$$

$$Y_{500} = Y_{784} + \delta y_{784\text{-}500} = 4029.857 + 21.81 = 4051.667m \qquad (6.61)$$
$$Y_{504} = Y_{784} + \delta y_{784\text{-}504} = 4029.857 + 36.82 = 4066.677m$$

$$H_{500} = H_{784} + \delta h_{784\text{-}500} = 454.194 + (-0.91) = 453.284m \qquad (6.62)$$
$$H_{504} = H_{784} + \delta h_{784\text{-}504} = 454.194 + (-3.85) = 450.344m$$

Calculele pentru drumuire şi radiate se pot organiza în tabele de forma celor de mai jos în care:

1. - coloana 1 conţine numele punctului de staţie;
2. - coloana 2 conţine numele punctului vizat;
3. - coloana 3 conţine distanţele înclinate L_{ij};
4. - coloana 4 conţine unghiurile de pantă α_{ij};
5. - coloana 6 conţine unghiurile orizontale ω_{ij};
6. - coloana 7 conţine orientările calculate θ'_{ij}, corecţiile pentru orientări q_θ şi orientările compensate θ_{ij};
7. - coloana 9 conţine distanţele orizontale D_{ij};
8. - coloanele 10, 11, 12 conţin creşterile de coordonate calculate $\delta x'_{ij}$, $\delta y'_{ij}$ $\delta h'_{ij}$, corecţiile pentru creşterile de coordonate c_x, c_y, c_h şi creşterile de coordonate compensate δx_{ij}, δy_{ij} δh_{ij};
9. - coloanele 13, 14, 15 conţin coordonatele absolute ale punctelor din drumuire şi ale punctelor radiate X_i, Y_i, H_i.

Calculul coordonatelor punctelor de drumuire şi a punctelor radiate

Tabelul 6-3

STATIA	PUNCTE VIZATE	DISTANTE INCLINATE		UNGHIURI VERTICALE α			SinαCosα / $Cos^2\alpha$ / Tgα	UNGHIURI ORIZONTALE ω			ORIENTARI θ CALCULATE / CORECTII / COMPENSATE			Sinθ / Cosθ
		m	cm	G	C	CC		G	C	CC	G	C	CC	
1	2	3		4			5	6			7			8
62	8										3	50	04	
											143	29	97	
	783	148	13	+16	09	00		139	79	93		-	03	
											143	**29**	**94**	
783														
	784	153	32	+5	04	00		91	90	00	35	19	97	
												-	06	
											35	**19**	**91**	
784														
	785	153	83	-4	31	00		256	96	00	92	15	97	
												-	09	
											92	**15**	**88**	
	500	56	70	-1	03	00		83	31	00	175	46	89	
	504	55	91	-4	39	00		353	75	00	45	90	89	
785														
	63	176	97	-5	22	00		186	04	38	78	20	35	
												-1	15	
											78	**19**	**20**	
63														
	4							167	37	63	45	57	98	
												-1	44	
											45	**56**	**54**	
											V_i=45.5654			
											V_e=45.5798			
											C_θ=-1^{c}44^{cc}			
											K_θ=-0.00288			

Calculul coordonatelor punctelor de drumuire şi a punctelor radiate

Tabelul 6-4

Distanţe orizontale		COORDONATE RELATIVE ± ΔX Calculate Corecţii Compensate		± ΔY Calculate Corecţii Compensate		± ΔH Calculate Corecţii Compensate		COORDONATE ABSOLUTE X		Y		H		NR.PUNCT	OBSERVATII
M	cm	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm		
9		10		11		12		13		14		15		16	17
								3745	60	3838	07	404	98	62	
143	42	-90 0 -90	198 064 134	111 0 111	506 010 516	37 0 37	040 029 069	3655	466	3949	586	442	039	783	
152	83	130 0 130	059 069 128	80 0 80	260 011 271	12 0 12	125 031 155	3785	594	4029	857	454	194	784	
153	48	18 0 18	856 069 925	152 0 152	317 011 328	-10 0 -10	407 031 376	3804	519	4182	185	443	818	785	
56	69	-52	53	21	81	-0	91	3733	06	4051	17	453	28	500	
41	50	-36	58	-19	62	-1	31	3749	01	4010	24	452	88	501	
42	38	-22	98	-35	60	0	81	3762	61	3994	26	455	00	502	
37	32	28	51	24	08	-1	84	3814	10	4005	73	452	35	503	
55	77	41	89	36	82	-3	85	3827	48	4086	68	450	34	504	
62	37	-31	44	53	86	6	01	3754	15	4083	72	460	20	505	
176	37	59 0 59	242 079 321	166 0 166	123 012 135	-14 0 -14	494 035 458	3863	840	4348	320	429	370	63	
								3863	840	4348	320	429	370		
		$V_j=X_{63}-X_{62}=$ =118.240 $V_e=\Sigma\delta x'=$ =117.959 $e_x=-0.281$ $c_x=0.281$ mm $k_x=0.000449$		$V_j=Y_{63}-Y_{62}=$ =510.250 $V_e=\Sigma\delta y'=$ =510.206 $e_y=-0.044$ $c_y=0.044$ mm $k_y=0.000070$		$V_j=H_{63}-H_{62}=$ =24.39 $V_e=\Sigma\delta h'=$ =24.26 $e_h=-0.126$ $c_h=0.126$ mm $k_h=0.000201$									

6.3.2. Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute şi laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea prin metoda rotaţiei şi punerii în scară.

1. Date iniţiale:

Punctele vechi (de coordonate cunoscute) A, B, C şi D sunt marcate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. (fig. 6.15).

Punctele 201 şi 202 sunt marcate, nu au coordonate cunoscute şi pentru ele dorim să obţinem coordonatele X, Y şi H

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie pentru măsurarea direcţiilor orizontale şi verticale. Cu ajutorul acestor direcţii se determină unghiurile orizontale ω_i şi unghiurile verticale α_i. Se măsoară lungimile înclinate L_{ij} ale laturilor de drumuire direct cu panglica sau stadimetric.

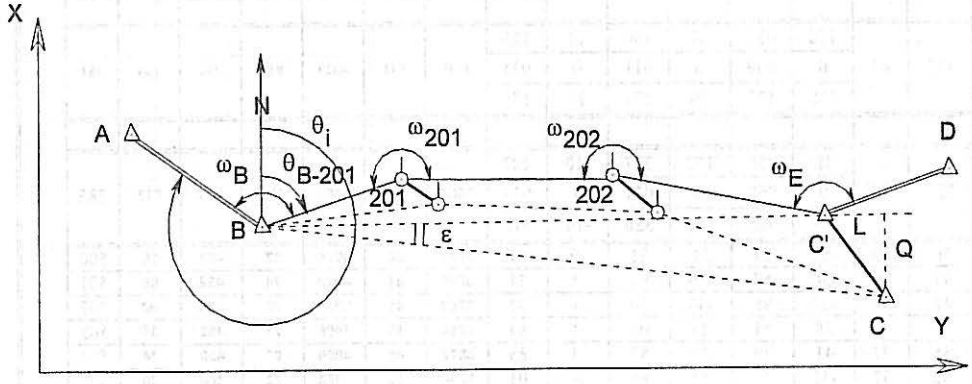


Figura 6.15
Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute şi laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea prin metoda rotaţiei şi a punerii în scară

3. Etape de calcul:

a. Calculul distanţelor orizontale

$$D_{ij} = L_{ij} * \cos\alpha_{ij} \qquad (6.63)$$

b. Calculul orientărilor

b1. Calculul orientării laturii de sprijin

$$\theta_{AB} = \theta_i = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB}} = \text{arctg}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \qquad (6.64)$$

b2. Calculul orientărilor provizorii ale laturilor de drumuire

$$\begin{aligned}
\theta'_{B-201} &= \theta_{B-A} + \omega_B \\
\theta'_{201-202} &= \theta'_{B-201} - 200 + \omega_{201} \\
\theta'_{202-C} &= \theta'_{201-202} - 200 + \omega_{202} \\
\theta'_{C-D} &= \theta'_{202-C} - 200 + \omega_E
\end{aligned} \qquad (6.65)$$

c. Calculul coordonatelor relative provizorii

$$\begin{array}{lll}
\delta x'_{B-201} = D_{B-201} * \cos\theta'_{B-201} & \delta y'_{B-201} = D_{B-201} * \sin\theta'_{B-201} & \delta h'_{B-201} = D_{B-201} * tg\alpha'_{B-201} \\
\delta x'_{201-202} = D_{201-202} * \cos\theta'_{201-202} & \delta y'_{201-202} = D_{201-202} * \sin\theta'_{201-202} & \delta h'_{201-202} = D_{201-202} * tg\alpha'_{201-202} \\
\underline{\delta x'_{202-C} = D_{202-C} * \cos\theta'_{202-C}} & \underline{\delta y'_{202-C} = D_{202-C} * \sin\theta'_{202-C}} & \underline{\delta h'_{202-C} = D_{202-C} * tg\alpha'_{202-C}} \\
\sum \delta x'_{ij} = \sum D_{ij} * \cos\theta'_{ij} & \sum \delta y'_{ij} = \sum D_{ij} * \sin\theta'_{ij} & \sum \delta h'_{ij} = \sum D_{ij} * tg\alpha'_{ij}
\end{array} \qquad (6.66)$$

d. Calculul coordonatelor absolute provizorii ale punctului C

$$\begin{aligned}
X'_C &= X_B + \sum \delta x'_{ij} \\
Y'_C &= Y_B + \sum \delta y'_{ij} \\
H'_C &= H_B + \sum \delta h'_{ij}
\end{aligned} \qquad (6.67)$$

e. Calculul neînchiderilor pentru punctul C

$$\begin{aligned}
e_x &= v_e - v_j = X'_C - X_C \\
e_y &= v_e - v_j = Y'_C - Y_C \\
e_h &= v_e - v_j = H'_C - H_C
\end{aligned} \qquad (6.68)$$

se calculează eroarea totală:

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \qquad (6.69)$$

dacă:

$$\begin{aligned}
e &\le T \\
e_h &\le T_h
\end{aligned} \qquad (6.70)$$

unde T şi T_h sunt:

$$T = \pm\left(0{,}003\sqrt{\sum D_{ij}} + \frac{\sum D_{ij}}{5000}\right), \text{pentru intravilan si terenuri cu panta} < 5^g;$$

$$T = \pm\left(0{,}0045\sqrt{\sum D_{ij}} + \frac{\sum D_{ij}}{1733}\right), \text{pentru extravilan si terenuri cu panta} > 5^g; \quad (6.71)$$

$$T_h = 0{,}2\sqrt{\sum D_{ij[km]}}.$$

f. Calculul distanțelor D_{BC}, $D_{B-C'}$ şi al orientărilor θ_{B-C}, $\theta_{B-C'}$ din coordonate

$$\begin{aligned} D_{B-C} &= \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2} \\ D_{B-C'} &= \sqrt{(X_{C'} - X_B)^2 + (Y_{C'} - Y_B)^2} \\ \theta_{B-C} &= \text{arctg}\frac{\Delta y_{B-C}}{\Delta x_{B-C}} \\ \theta_{B-C'} &= \text{arctg}\frac{\Delta y_{B-C'}}{\Delta x_{B-C'}} \end{aligned} \quad (6.72)$$

g. Calculul factorului de scară q şi a unghiurilor de rotație în plan orizontal ε şi în plan vertical φ

$$\begin{aligned} q &= \frac{D_{B-C}}{D_{B-C'}} \\ \varepsilon &= \theta_{B-C} - \theta_{B-C'} \\ \varphi &= \text{arctg}\frac{\Delta H_{C-C'}}{D_{B-C'}} \end{aligned} \quad (6.73)$$

h. Calculul coordonatelor relative compensate

$$\begin{aligned} \delta x_{ij} &= q * D_{ij}\cos(\theta'_{ij} + \varepsilon) \\ \delta y_{ij} &= q * D_{ij}\sin(\theta'_{ij} + \varepsilon) \\ \delta h_{ij} &= q * D_{ij}\text{tg}(\alpha'_{ij} + \varphi) \end{aligned} \quad (6.74)$$

i. Calculul coordonatelor absolute

$$\begin{aligned} X_{201} &= X_B + \delta x_{B-201} & Y_{201} &= Y_B + \delta y_{B-201} & H_{201} &= H_B + \delta h_{B-201} \\ X_{202} &= X_{201} + \delta x_{201-202} & Y_{202} &= Y_{201} + \delta y_{201-202} & H_{202} &= H_{201} + \delta h_{201-202} \\ X_C &= X_{202} + \delta x_{202-C} & Y_C &= Y_{202} + \delta y_{202-C} & H_C &= H_{202} + \delta h_{202-C} \end{aligned} \quad (6.75)$$

j. Calculul abaterii longitudinale L, transversale Q şi totale

$$L = D_{B-C}\cos\varepsilon - D_{B-C}$$
$$Q = D_{B-C}\sin\varepsilon \qquad (6.76)$$
$$e = \sqrt{L^2 + Q^2}$$

L şi Q arată cât de bine se încadrează reţeaua poligonală între punctele vechi B şi C şi reprezintă un control al calităţii măsurătorilor, dar şi al calităţii coordonatelor pe care se sprijină drumuirea.

Când punctele de sprijin sunt de calitate şi avem o drumuire alungită, atunci L indică în principal calitatea măsurătorilor de distanţe, iar Q arată calitatea măsurării unghiurilor de frângere ω_i.

Prin acest mod de prelucrare, imprecizia unghiurilor măsurate în punctul iniţial şi final nu influenţează prelucrarea. Aceasta este influenţată doar de lungimile şi unghiurile "interne" ale drumuirii, precizia lor fiind hotărâtoare. Imprecizia orientărilor şi unghiurilor în punctul iniţial şi final influenţează doar unghiul ε şi în consecinţă L şi Q.

6.3.2.1. Exemplu. Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute şi laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea prin metoda rotaţiei şi punerii în scară.

1. Date iniţiale:

a. - unghiurile ω_i măsurate pe teren prin metoda seriilor, tabel 6-6, coloana 6;

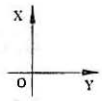
b. - lungimile laturilor L_{ij} măsurate cu panglica dus-întors, tabel 6-6, coloana 3;

c. - unghiurile verticale α_i, tabel 6-6, coloana 4.

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 8, 62, 63, 4
Sistem de proiecţie "LOCAL"

Tabelul 6-5

Nr. pct.	X [m]	Y [m]	H [m]
8	5343.18	3926.00	-
62	3745.60	3838.07	404.98
63	3863.84	4348.32	429.37
4	5750.36	5988.76	-



2. Schița vizelor:

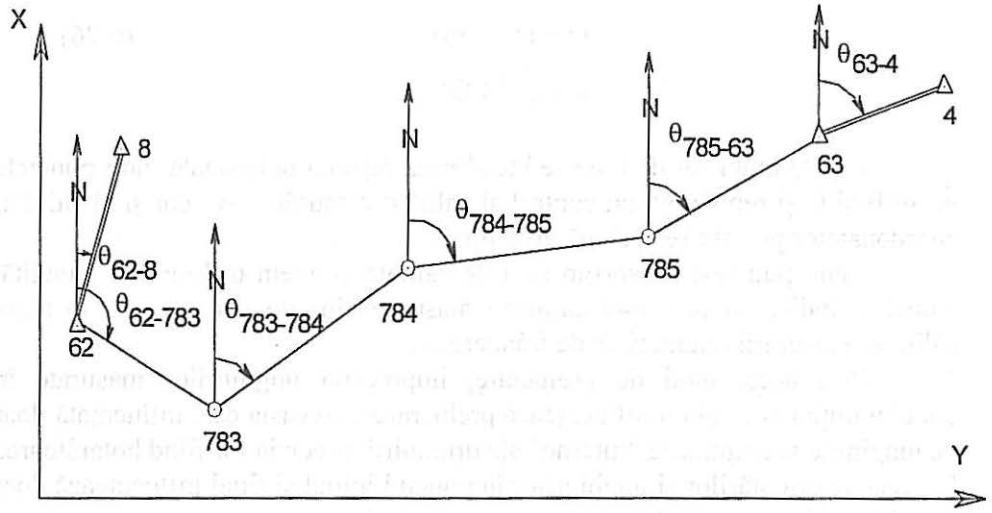


Figura 6.16
Drumuire sprijinită la capete pe puncte
de coordonate cunoscute şi laturi cu orientări cunoscute
Prelucrarea prin metoda rotației şi punerii în scară

3. Etape de calcul:

a. Calculul distanțelor orizontale

$$\begin{aligned} D_{62-783} &= L_{62-783}\cos\alpha_{62-783} = 148.13 * \cos 16.0900 = 143.42\text{m} \\ D_{783-784} &= L_{783-784}\cos\alpha_{783-784} = 153.32 * \cos 5.0400 = 152.83\text{m} \\ D_{784-785} &= L_{784-785}\cos\alpha_{784-785} = 153.83 * \cos -4.3100 = 153.48\text{m} \\ D_{785-63} &= L_{785-63}\cos\alpha_{785-63} = 176.97 * \cos -5.2200 = 176.37\text{m} \end{aligned} \quad (6.77)$$

b. Calculul orientărilor

b1. Calculul orientării laturii de sprijin

$$\theta_i = \theta_{62-8} = \text{arctg}\frac{\Delta y_{62-8}}{\Delta x_{62-8}} = \frac{3926.00 - 3838.07}{5343.18 - 3745.60} = \frac{87.93}{1597.58} = 3^{G}.5004 \quad (6.78)$$

b2. Calculul orientărilor provizorii ale laturilor de drumuire

$$\begin{aligned}
\theta'_{62-783} &= \theta_{62-8} + \omega_{62} = 143^{G}.2997 \\
\theta'_{783-784} &= \theta'_{62-783} - 200 + \omega_{783} = 35^{G}.1997 \\
\theta'_{784-785} &= \theta'_{783-784} - 200 + \omega_{784} = 92^{G}.1597 \\
\theta'_{785-63} &= \theta'_{784-785} - 200 + \omega_{785} = 78^{G}.2035 \\
\theta'_{63-4} &= \theta'_{785-63} - 200 + \omega_{63} = 45^{G}.5798
\end{aligned} \qquad (6.79)$$

c. Calculul coordonatelor relative provizorii

$$\begin{aligned}
\delta x'_{62-783} &= D_{62-783}\cos\theta_{62-783} = 143.42 * \cos 143.2924 = -90.198\text{m} \\
\delta x'_{783-784} &= D_{783-784}\cos\theta_{783-784} = 152.83 * \cos 35.1991 = 130.059\text{m} \\
\delta x'_{784-785} &= D_{784-785}\cos\theta_{784-785} = 153.84 * \cos 92.1588 = 18.856\text{m} \\
\delta x'_{785-63} &= D_{785-63}\cos\theta_{785-63} = 176.37 * \cos 78.1920 = 59.242\text{m} \\
\sum \delta x'_{ij} &= \sum D_{ij}\cos\theta_{ij} = (-90.198) + 130.059 + 18.856 + 59.242 = 117.959\text{m}
\end{aligned} \qquad (6.80)$$

$$\begin{aligned}
\delta y'_{62-783} &= D_{62-783}\sin\theta_{62-783} = 143.42 * \sin 143.2924 = 111.506\text{m} \\
\delta y'_{783-784} &= D_{783-784}\sin\theta_{783-784} = 152.83 * \sin 35.1991 = 80.260\text{m} \\
\delta y'_{784-785} &= D_{784-785}\sin\theta_{784-785} = 153.84 * \sin 92.1588 = 152.317\text{m} \\
\delta y'_{785-63} &= D_{785-63}\sin\theta_{785-63} = 176.37 * \sin 78.1920 = 166.123\text{m} \\
\sum \delta y'_{ij} &= \sum D_{ij}\sin\theta_{ij} = 111.506 + 80.260 + 152.317 + 166.123 = 510.206\text{m}
\end{aligned} \qquad (6.81)$$

$$\begin{aligned}
\delta h'_{62-783} &= D_{62-783}\,tg\alpha_{62-783} = 143.42 * tg 16.0900 = 37.041\text{m} \\
\delta h'_{783-784} &= D_{783-784}\,tg\alpha_{783-784} = 152.83 * tg 5.0400 = 12.125\text{m} \\
\delta h'_{784-785} &= D_{784-785}\,tg\alpha_{784-785} = 153.84 * tg(-4.3100) = -10.407\text{m} \\
\delta h'_{785-63} &= D_{785-63}\,tg\alpha_{785-63} = 176.37 * tg(-5.2200) = -14.494\text{m} \\
\sum \delta h'_{ij} &= \sum D_{ij}\,tg\alpha_{ij} = 37.040 + 12.125 + (-10.407) + (-14.494) = 24.265\text{m}
\end{aligned} \qquad (6.82)$$

d. Calculul coordonatelor absolute provizorii ale punctului 63

$$\begin{aligned}
X'_{63} &= X_{62} + \sum \delta x'_{ij} = 3745.60 + 117.933 = 3863.533\text{m} \\
Y'_{63} &= Y_{62} + \sum \delta y'_{ij} = 3838.07 + 510.230 = 4348.300\text{m} \\
H'_{63} &= H_{62} + \sum \delta h'_{ij} = 404.98 + 24.265 = 429.245\text{m}
\end{aligned} \qquad (6.83)$$

e. Calculul neînchiderilor pentru punctul C

$$\begin{aligned} e_x &= X'_{63} - X_{63} = 3863.533 - 3863.840 = -0.307 \\ e_y &= Y'_{63} - Y_{63} = 4348.300 - 4348.320 = -0.020 \\ e_h &= H'_{63} - H_{63} = 429.245 - 429.370 = -0.125 \end{aligned} \tag{6.84}$$

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \sqrt{(-307)^2 + (-0.020)^2} = 0.308\text{m} \tag{6.85}$$

$$\begin{aligned} \Sigma D_{ij} &= D_{62-783} + D_{783-784} + D_{784-785} + D_{785-63} = \\ &= 143.42 + 152.83 + 153.48 + 176.37 = 626.10\text{m} \end{aligned} \tag{6.86}$$

$$\begin{aligned} T &= \pm\left(0.0045\sqrt{\Sigma D} + \frac{\Sigma D}{1733}\right) = \\ &= \pm\left(0.0045\sqrt{626.10} + \frac{626.10}{1733}\right) = 0.473\text{m} \\ T_h &= 0.2\sqrt{\Sigma D_{[km]}} = 0.2\sqrt{0.626} = 0.158\text{m} \end{aligned} \tag{6.87}$$

f. Calculul distanțelor D_{62-63}, $D_{62-63'}$ și al orientărilor θ_{62-63}, $\theta_{62-63'}$ din coordonate

$$\begin{aligned} D_{62-63} &= \sqrt{(X_{63} - X_{62})^2 + (Y_{63} - Y_{62})^2} = \\ &= \sqrt{(3863.840 - 3745.600)^2 + (4348.320 - 3838.070)^2} = 523.771 \\ D_{62-63'} &= \sqrt{(X_{63'} - X_{62})^2 + (Y_{63'} - Y_{62})^2} = \\ &= \sqrt{(3863.533 - 3745.600)^2 + (4348.300 - 3838.070)^2} = 523.682 \end{aligned} \tag{6.88}$$

$$\begin{aligned} \theta_{62-63} &= \text{arctg}\frac{\Delta Y_{62-63}}{\Delta X_{62-63}} = \text{arctg}\frac{4348.320 - 3838.070}{3863.840 - 3745.600} = 85^G.5035 \\ \theta_{62-63'} &= \text{arctg}\frac{\Delta Y_{62-63'}}{\Delta X_{62-63'}} = \text{arctg}\frac{4348.300 - 3838.070}{3863.533 - 3745.600} = 85^G.5393 \end{aligned} \tag{6.89}$$

g. Calculul factorului de scară q şi a unghiurilor de rotaţie în plan orizontal ε şi în plan vertical φ

$$q = \frac{D_{62-63}}{D_{62-63'}} = \frac{523.771}{523.682} = 1.00016995$$
$$\varepsilon = \theta_{62-63} - \theta_{62-63'} = 85.5035 - 85.5393 = -0.0358 \qquad (6.90)$$
$$\varphi = \text{arctg}\frac{\Delta H_{63'-63}}{D_{62-63'}} = \frac{429.370 - 429.245}{523.682} = 0.0152$$

h. Calculul coordonatelor relative compensate

$$\delta x_{62-783} = q * D_{62-783} \cos(\theta'_{62-783} + \varepsilon) =$$
$$= 1.00016995 * 143.424 \cos(143.2997 + (-0.0358)) = -90.153\text{m}$$
$$\delta x_{783-784} = q * D_{783-784} \cos(\theta'_{783-784} + \varepsilon) =$$
$$= 1.00016995 * 152.840 \cos(35.1997 + (-0.0358)) = 130.134\text{m} \qquad (6.91)$$
$$\delta x_{784-785} = q * D_{784-785} \cos(\theta'_{784-785} + \varepsilon) =$$
$$= 1.00016995 * 153.478 \cos(92.1597 + (-0.0358)) = 18.943\text{m}$$
$$\delta x_{785-63} = q * D_{785-63} \cos(\theta'_{785-63} + \varepsilon) =$$
$$= 1.00016995 * 176.375 \cos(78.2035 + (-0.0358)) = 59.318\text{m}$$

$$\delta y_{62-783} = q * D_{62-783} \sin(\theta'_{62-783} + \varepsilon) =$$
$$= 1.00016995 * 143.424 \sin(143.2997 + (-0.0358)) = 111.579\text{m}$$
$$\delta y_{783-784} = q * D_{783-784} \sin(\theta'_{783-784} + \varepsilon) =$$
$$= 1.00016995 * 152.840 \sin(35.1997 + (-0.0358)) = 80.208\text{m} \qquad (6.92)$$
$$\delta y_{784-785} = q * D_{784-785} \sin(\theta'_{784-785} + \varepsilon) =$$
$$= 1.00016995 * 153.478 \sin(92.1597 + (-0.0358)) = 152.331\text{m}$$
$$\delta y_{785-63} = q * D_{785-63} \sin(\theta'_{785-63} + \varepsilon) =$$
$$= 1.00016995 * 176.375 \sin(78.2035 + (-0.0358)) = 166.133\text{m}$$

$$\delta h_{62-783} = q * D_{62-783} tg(\alpha_{62-783} + \varphi) =$$
$$= 1.00016995 * 143.424 tg(16.0900 + 0.0152) = 37.084m$$
$$\delta h_{783-784} = q * D_{783-784} tg(\theta'_{783-784} + \varphi) =$$
$$= 1.00016995 * 152.840 tg(5.0400 + 0.0152) = 12.164m$$
$$\delta h_{784-785} = q * D_{784-785} tg(\theta'_{784-785} + \varphi) = \quad (6.93)$$
$$= 1.00016995 * 153.478 tg((-4.3100) + 0.0152)) = -10.372m$$
$$\delta h_{785-63} = q * D_{785-63} tg(\theta'_{785-63} + \varphi) =$$
$$= 1.00016995 * 176.375 tg((-5.2200) + 0.0152) = -14.485m$$

i. Calculul coordonatelor absolute

$$X_{783} = X_{62} + \delta x_{62-783} = 3745.600 + (-90.153) = 3655.447m$$
$$X_{784} = X_{783} + \delta x_{783-784} = 3655.447 + 130.134 = 3785.581m \quad (6.94)$$
$$X_{785} = X_{784} + \delta x_{784-785} = 3785.581 + 18.943 = 3804.524m$$
$$X_{63} = X_{785} + \delta x_{785-63} = 3804.524 + 59.318 = 3863.840m$$

$$Y_{783} = Y_{62} + \delta y_{62-783} = 3838.070 + 111.579 = 3949.649m$$
$$Y_{784} = Y_{783} + \delta y_{783-784} = 3949.649 + 80.208 = 4029.857m \quad (6.95)$$
$$Y_{785} = Y_{784} + \delta y_{784-785} = 4029.857 + 152.331 = 4182.188m$$
$$Y_{63} = Y_{785} + \delta y_{785-63} = 4182.188 + 166.133 = 4348.320m$$

$$H_{783} = H_{62} + \delta h_{62-783} = 404.980 + 37.084 = 442.064m$$
$$H_{784} = H_{783} + \delta h_{783-784} = 442.064 + 12.164 = 454.228m \quad (6.96)$$
$$H_{785} = H_{784} + \delta h_{784-785} = 454.228 + (-10.372) = 443.856m$$
$$H_{63} = H_{785} + \delta h_{785-63} = 443.856 + (-14.485) = 429.370m$$

j. Calculul abaterii longitudinale L, transversale Q și totale e

$$L = D_{62-63} \cos\varepsilon - D_{62-63'} = 523.771 \cos(-0.0358) - 523.682 = 0.089m$$
$$Q = D_{62-63} \sin\varepsilon = 523.771 \sin(-0.0358) = -0.295m \quad (6.97)$$
$$e = \sqrt{L^2 + Q^2} = \sqrt{(0.089)^2 + (-0.295)^2} = 0.308m$$

Calculul coordonatelor punctelor de drumuire şi a punctelor radiate

Tabel 6-6

STATIA	PUNCTE VIZATE	Distanţe înclinate		Unghiuri verticale α			SinαCosα / $Cos^2\alpha$	Unghiuri orizontale ω			ORIENTARI θ: CALCULATE / CORECTII / COMPENSATE			Sinθ / Cosθ
		m	cm	G	C	CC	Tgα	G	C	CC	G	C	CC	
1	2	3		4			5	6			7			8
62	8										3	50	04	
	783	148	13	+16	09	00		139	79	93	143	29	97	
783														
	784	153	32	+5	04	00		91	90	00	35	19	97	
784														
	785	153	83	-4	31	00		256	96	00	92	15	97	
785														
	63	176	97	-5	22	00		186	04	38	78	20	35	
63														
	4							167	37	63	45	57	98	

Calculul coordonatelor punctelor de drumuire şi a punctelor radiate

Tabel 6-7

Distanțe orizontale		COORDONATE RELATIVE						COORDONATE ABSOLUTE						NR.PUNCT	OBSERVATII
		± ΔX		± ΔY		± ΔH		X		Y		H			
		Calculate		Calculate		Calculate									
		Corecții		Corecții		Corecții									
		Compens.		Compens.		Compens.									
m	c	m	cm	m	cm	m	cm	m	c	m	c	m	c		
9		10		11		12		13		14		15		16	17
								3745	60	3838	07	404	98	62	
143	424	-90	201	111	509	37	041	3655	447	3949	649	442	064	783	
		-90	153	111	579	37	084								
152	840	130	066	80	267	12	125	3785	581	4029	857	454	228	784	
		130	134	80	208	12	164								
153	478	18	854	152	316	-10	407	3804	524	4182	188	443	856	785	
		18	943	152	331	-10	372								
176	375	59	214	166	138	-14	494	3863	840	4348	320	429	370	63	
		59	318	166	133	-14	485								
								3863	840	4348	320	429	370		
		$\Sigma\delta x'_{ij}$= 117.933		$\Sigma\delta y'_{ij}$= 510.230		$\Sigma\delta h'_{ij}$= 24.265									
		$X_{63'}$= 3863.533		$Y_{63'}$= 4348.300		$H_{63'}$= 429.245									
		q=1.00016995 ε=-0.0358 φ=0.0152													

6.3.3. Drumuirea cu punct nodal

1. Date inițiale:

Punctele vechi (de coordonate cunoscute) A, A', B, B', C și C' sunt marcate, au fost recunoscute și identificate pe teren. (fig. 6.17).

Punctele 1, 2, ... n-1 și N sunt marcate, nu au coordonate cunoscute și pentru ele dorim să obținem coordonatele X, Y și H.

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie pentru măsurarea direcțiilor orizontale și verticale. Cu ajutorul acestor direcții se determină unghiurile orizontale ω_i și unghiurile verticale α_i. Se măsoară lungimile înclinate L_{ij} ale laturilor de drumuire direct cu panglica sau stadimetric.

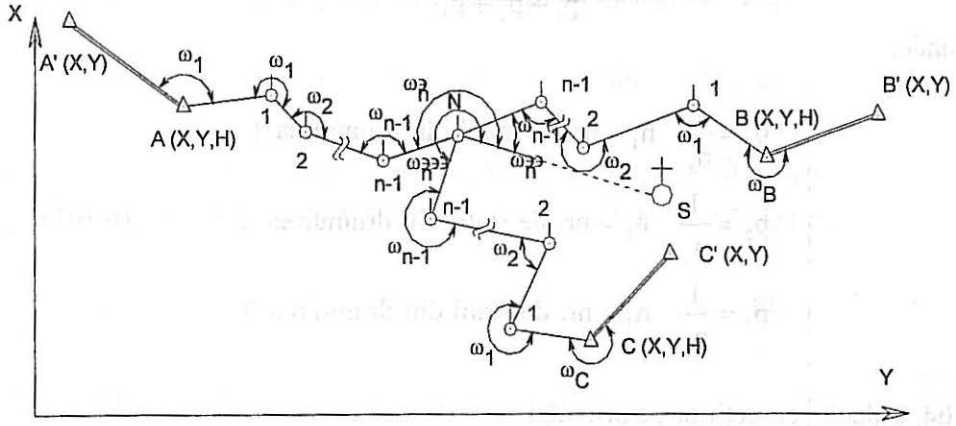


Figura 6.17
Drumuirea cu punct nodal

3. Etape de calcul:

a. Calculul distanțelor orizontale

$$D_{ij} = L_{ij} * \cos\alpha_{ij} \qquad (6.98)$$

b. Calculul orientărilor și compensarea lor

b1. Calculul orientărilor laturilor de sprijin

$$\theta_{AA'} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{AA'}}{\Delta X_{AA'}} = \text{arctg}\frac{Y_{A'} - Y_A}{X_{A'} - X_A}$$

$$\theta_{BB'} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{BB'}}{\Delta X_{BB'}} = \text{arctg}\frac{Y_{B'} - Y_B}{X_{B'} - X_B} \qquad (6.99)$$

$$\theta_{CC'} = \text{arctg}\frac{\Delta Y_{CC'}}{\Delta X_{CC'}} = \text{arctg}\frac{Y_{C'} - Y_C}{X_{C'} - X_C}$$

b2. Calculul orientărilor provizorii ale laturilor de drumuire

$$\theta'_{A-1}=\theta_{A-A'}+\omega_A\pm200^g \quad \theta'_{B-1}=\theta_{B-B'}+\omega_B\pm200^g \quad \theta'_{C-1}=\theta_{C-C'}+\omega_C\pm200^g$$
$$\theta^{'(1)}_{N-S}=\theta'_{n-1,N}+\omega'_n\pm200^g \quad \theta^{'(2)}_{N-S}=\theta'_{n-1,N}+\omega''_n\pm200^g \quad \theta^{'(3)}_{N-S}=\theta'_{n-1,N}+\omega'''_n\pm200^g \qquad (6.100)$$

b3. Calculul orientării θ_{N-S} folosind media ponderată

$$\theta^{o}_{N-S}=\frac{\theta^{'(1)}_{N-S}*p_1+\theta^{'(2)}_{N-S}*p_2+\theta^{'(3)}_{N-S}*p_3}{p_1+p_2+p_3} \qquad (6.101)$$

unde:

$$p_1=\frac{1}{n_1} \quad n_1=\text{nr. de statii din drumuirea 1}$$
$$p_2=\frac{1}{n_2} \quad n_2=\text{nr. de statii din drumuirea 2} \qquad (6.102)$$
$$p_3=\frac{1}{n_3} \quad n_3=\text{nr. de statii din drumuirea 3}$$

b4. Calculul corecțiilor pe orientări

$$c^{(1)}_{\Theta}=\theta^{o}_{N-S}-\theta^{(1)}_{N-S}$$
$$c^{(2)}_{\Theta}=\theta^{o}_{N-S}-\theta^{(2)}_{N-S} \qquad (6.103)$$
$$c^{(3)}_{\Theta}=\theta^{o}_{N-S}-\theta^{(3)}_{N-S}$$

b5. Calculul corecțiilor unitare

$$k^{(1)}_{\theta}=\frac{c^{(1)}_{\Theta}}{n_1}$$
$$k^{(2)}_{\theta}=\frac{c^{(2)}_{\Theta}}{n_2} \qquad (6.104)$$
$$k^{(3)}_{\Theta}=\frac{c^{(3)}_{\Theta}}{n_3}$$

b6. Calculul orientărilor definitive pe fiecare drumuire

$$\theta_{A-1} = \theta'_{A-1} + k_\Theta^{(1)} \quad \theta_{B-1} = \theta'_{B-1} + k_\Theta^{(2)} \quad \theta_{C-1} = \theta'_{C-1} + k_\Theta^{(3)}$$

$$\theta_{N-S}^{(1)} = \theta'^{(1)}_{N-S} + n_1 k_\Theta^{(1)} \quad \theta_{N-S}^{(2)} = \theta'^{(2)}_{N-S} + n_2 k_\Theta^{(2)} \quad \theta_{N-S}^{(3)} = \theta'^{(3)}_{N-S} + n_3 k_\Theta^{(3)} \tag{6.105}$$

Control:

$$\theta_{N-S}^{(1)} = \theta_{N-S}^{(2)} = \theta_{N-S}^{(3)} = \theta_{N-S}^{O} \tag{6.106}$$

c. Calculul coordonatelor relative şi compensarea lor

c1. Calculul coordonatelor relative provizorii pe fiecare drumuire

$$\delta x'_{A-1} = D_{A-1}\cos\theta_{A-1} \quad \delta y'_{A-1} = D_{A-1}\sin\theta_{A-1} \quad \delta h'_{A-1} = D_{A-1}tg\alpha_{A-1}$$

$$\delta x'_{n-1,N} = D_{n-1,N}\cos\theta_{n-1,N} \quad \delta y'_{n-1,N} = D_{n-1,N}\sin\theta_{n-1,N} \quad \delta h'_{n-1,N} = D_{n-1,N}tg\alpha_{n-1,N} \tag{6.107}$$

$$\sum\delta x'^{(1)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\cos\theta_{i-j} \quad \sum\delta y'^{(1)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\sin\theta_{i-j} \quad \sum\delta h'^{(1)}_{i-j} = \sum D_{i-j}tg\alpha_{i-j}$$

$$\delta x'_{B-1} = D_{B-1}\cos\theta_{B-1} \quad \delta y'_{B-1} = D_{B-1}\sin\theta_{B-1} \quad \delta h'_{B-1} = D_{B-1}tg\alpha_{B-1}$$

$$\delta x'_{n-1,N} = D_{n-1,N}\cos\theta_{n-1,N} \quad \delta y'_{n-1,N} = D_{n-1,N}\sin\theta_{n-1,N} \quad \delta h'_{n-1,N} = D_{n-1,N}tg\alpha_{n-1,N} \tag{6.108}$$

$$\sum\delta x'^{(2)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\cos\theta_{i-j} \quad \sum\delta y'^{(2)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\sin\theta_{i-j} \quad \sum\delta h'^{(2)}_{i-j} = \sum D_{i-j}tg\alpha_{i-j}$$

$$\delta x'_{C-1} = D_{C-1}\cos\theta_{C-1} \quad \delta y'_{C-1} = D_{C-1}\sin\theta_{C-1} \quad \delta h'_{C-1} = D_{C-1}tg\alpha_{C-1}$$

$$\delta x'_{n-1,N} = D_{n-1,N}\cos\theta_{n-1,N} \quad \delta y'_{n-1,N} = D_{n-1,N}\sin\theta_{n-1,N} \quad \delta h'_{n-1,N} = D_{n-1,N}tg\alpha_{n-1,N} \tag{6.109}$$

$$\sum\delta x'^{(3)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\cos\theta_{i-j} \quad \sum\delta y'^{(3)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\sin\theta_{i-j} \quad \sum\delta h'^{(3)}_{i-j} = \sum D_{i-j}tg\alpha_{i-j}$$

c2. Calculul coordonatelor provizorii ale punctului N

$$X_N^{(1)} = X_A + \sum\delta x'^{(1)}_{i-j} \quad X_N^{(2)} = X_B + \sum\delta x'^{(2)}_{i-j} \quad X_N^{(3)} = X_C + \sum\delta x'^{(3)}_{i-j}$$

$$Y_N^{(1)} = Y_A + \sum\delta y'^{(1)}_{i-j} \quad Y_N^{(2)} = Y_B + \sum\delta y'^{(2)}_{i-j} \quad Y_N^{(3)} = Y_C + \sum\delta y'^{(3)}_{i-j} \tag{6.110}$$

$$H_N^{(1)} = H_A + \sum\delta h'^{(1)}_{i-j} \quad H_N^{(2)} = H_B + \sum\delta h'^{(2)}_{i-j} \quad H_N^{(3)} = H_C + \sum\delta h'^{(3)}_{i-j}$$

c3. Calculul coordonatelor absolute ale punctului N

$$X_N = \frac{X_N^{(1)} * p_1 + X_N^{(2)} * p_2 + X_N^{(3)} * p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$
$$Y_N = \frac{Y_N^{(1)} * p_1 + Y_N^{(2)} * p_2 + Y_N^{(3)} * p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \qquad (6.111)$$
$$H_N = \frac{H_N^{(1)} * p_1 + H_N^{(2)} * p_2 + H_N^{(3)} * p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

unde:

$$p_1 = \frac{1}{D^{(1)}} \text{ si } D^{(1)} = \sum D_{i-j}^{(1)}$$
$$p_2 = \frac{1}{D^{(2)}} \text{ si } D^{(2)} = \sum D_{i-j}^{(2)} \qquad (6.112)$$
$$p_3 = \frac{1}{D^{(3)}} \text{ si } D^{(3)} = \sum D_{i-j}^{(3)}$$

c4. Calculul corecțiilor pe creşterile de coordonate

$$\begin{array}{lll} c_x^{(1)} = X_N - X_N^{(1)} & c_x^{(2)} = X_N - X_N^{(2)} & c_x^{(3)} = X_N - X_N^{(3)} \\ c_y^{(1)} = Y_N - Y_N^{(1)} & c_y^{(2)} = Y_N - Y_N^{(2)} & c_y^{(3)} = Y_N - Y_N^{(3)} \\ c_h^{(1)} = H_N - H_N^{(1)} & c_h^{(2)} = H_N - H_N^{(2)} & c_h^{(3)} = H_N - H_N^{(3)} \end{array} \qquad (6.113)$$

c5. Calculul corecțiilor unitare

$$k_x^{(1)} = \frac{c_x^{(1)}}{D^{(1)}}[\text{mm}/100\text{m}] \; k_x^{(2)} = \frac{c_x^{(2)}}{D^{(2)}}[\text{mm}/100\text{m}] \; k_x^{(3)} = \frac{c_x^{(3)}}{D^{(3)}}[\text{mm}/100\text{m}]$$
$$k_y^{(1)} = \frac{c_y^{(1)}}{D^{(1)}}[\text{mm}/100\text{m}] \; k_y^{(2)} = \frac{c_y^{(2)}}{D^{(2)}}[\text{mm}/100\text{m}] \; k_y^{(3)} = \frac{c_y^{(3)}}{D^{(3)}}[\text{mm}/100\text{m}] \qquad (6.113a)$$
$$k_h^{(1)} = \frac{c_h^{(1)}}{D^{(1)}}[\text{mm}/100\text{m}] \; k_h^{(2)} = \frac{c_h^{(2)}}{D^{(2)}}[\text{mm}/100\text{m}] \; k_h^{(3)} = \frac{c_h^{(3)}}{D^{(3)}}[\text{mm}/100\text{m}]$$

c6. Calculul coordonatelor relative compensate

$$\begin{array}{lll} \delta x_{A-1} = \delta x'_{A-1} + k_x^{(1)} * D_{A-1} & \delta x_{B-1} = \delta x'_{B-1} + k_x^{(2)} * D_{B-1} & \delta x_{C-1} = \delta x'_{C-1} + k_x^{(3)} * D_{C-1} \\ \text{---------------} & \text{---------------} & \text{---------------} \\ \delta x_{n-1,N} = \delta x'_{n-1,N} + k_x^{(1)} * D_{n-1,N} & \delta x_{n-1,N} = \delta x'_{n-1,N} + k_x^{(2)} * D_{n-1,N} & \delta x_{n-1,N} = \delta x'_{n-1,N} + k_x^{(3)} * D_{n-1,N} \\ \sum \delta x^{(1)} = X_N - X_A & \sum \delta x^{(2)} = X_N - X_B & \sum \delta x^{(3)} = X_N - X_C \end{array} \quad (6.114)$$

$$\begin{array}{lll} \delta y_{A-1} = \delta y'_{A-1} + k_y^{(1)} * D_{A-1} & \delta y_{B-1} = \delta y'_{B-1} + k_y^{(2)} * D_{B-1} & \delta y_{C-1} = \delta y'_{C-1} + k_y^{(3)} * D_{C-1} \\ \text{---------------} & \text{---------------} & \text{---------------} \\ \delta y_{n-1,N} = \delta y'_{n-1,N} + k_y^{(1)} * D_{n-1,N} & \delta y_{n-1,N} = \delta y'_{n-1,N} + k_y^{(2)} * D_{n-1,N} & \delta y_{n-1,N} = \delta y'_{n-1,N} + k_y^{(3)} * D_{n-1,N} \\ \sum \delta y^{(1)} = Y_N - Y_A & \sum \delta y^{(2)} = Y_N - Y_B & \sum \delta y^{(3)} = Y_N - Y_C \end{array} \quad (6.115)$$

$$\begin{array}{lll} \delta h_{A-1} = \delta h'_{A-1} + k_h^{(1)} * D_{A-1} & \delta h_{B-1} = \delta h'_{B-1} + k_h^{(2)} * D_{B-1} & \delta h_{C-1} = \delta h'_{C-1} + k_h^{(3)} * D_{C-1} \\ \text{---------------} & \text{---------------} & \text{---------------} \\ \delta h_{n-1,N} = \delta h'_{n-1,N} + k_h^{(1)} * D_{n-1,N} & \delta h_{n-1,N} = \delta h'_{n-1,N} + k_h^{(2)} * D_{n-1,N} & \delta h_{n-1,N} = \delta h'_{n-1,N} + k_h^{(3)} * D_{n-1,N} \\ \sum \delta h^{(1)} = H_N - H_A & \sum \delta h^{(2)} = H_N - H_B & \sum \delta h^{(3)} = H_N - H_C \end{array} \quad (6.116)$$

d. Calculul coordonatelor absolute ale punctelor din drumuiri

$$\begin{array}{lll} X_1 = X_A + \delta x_{A-1} & X_1 = X_B + \delta x_{B-1} & X_1 = X_C + \delta x_{C-1} \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\ X_N = X_{n-1} + \delta x_{n-1,N} & X_N = X_{n-1} + \delta x_{n-1,N} & X_N = X_{n-1} + \delta x_{n-1,N} \end{array} \quad (6.117)$$

$$\begin{array}{lll} Y_1 = Y_A + \delta y_{A-1} & Y_1 = Y_B + \delta y_{B-1} & Y_1 = Y_C + \delta y_{C-1} \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\ Y_N = Y_{n-1} + \delta y_{n-1,N} & Y_N = Y_{n-1} + \delta y_{n-1,N} & Y_N = Y_{n-1} + \delta y_{n-1,N} \end{array} \quad (6.118)$$

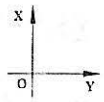
$$\begin{array}{lll} H_1 = H_A + \delta h_{A-1} & H_1 = H_B + \delta h_{B-1} & H_1 = H_C + \delta h_{C-1} \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\ H_N = H_{n-1} + \delta h_{n-1,N} & H_N = H_{n-1} + \delta h_{n-1,N} & H_N = H_{n-1} + \delta h_{n-1,N} \end{array} \quad (6.119)$$

6.3.3.1. Exemplu. Drumuirea cu punct nodal

1. Date inițiale:

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 33, 34, 59, 73, 78, 89, 74, 90, 77 Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 6-8



Nr. pct.	X [m]	Y [m]	H [m]
33	6412,212	7760,974	367,683
34	8220,403	6991,001	-
59	6256,013	8441,777	362,643
73	4326,920	7720,110	-
78	6182,462	7692,945	365,160
89	5128,036	10068,703	-
74	4783,321	6822,316	-
90	8256,100	8701,135	-
77	6629,941	6106,383	-

2. Măsurători:

a. - unghiurile ω_i măsurate pe teren prin metoda seriilor, tabel 6-11, coloana 6;
b.-lungimile laturilor L_{ij} măsurate cu panglica dus-întors, tabel 6-11, coloana 3;
c. - unghiurile verticale α_i, tabel 6-11, coloana 4.

Direcțiile orizontale compensate în stație, centrate și reduse

Tabelul 6-9

De la - la	Direcții măsurate [g c cc]
33-34	224.3582
33-101	25.4124
59-89	210.9987
59-90	80.6210
59-201	361.0561
78-77	20.6570
78-73	302.2112
78-74	338.5856
78-301	227.5262

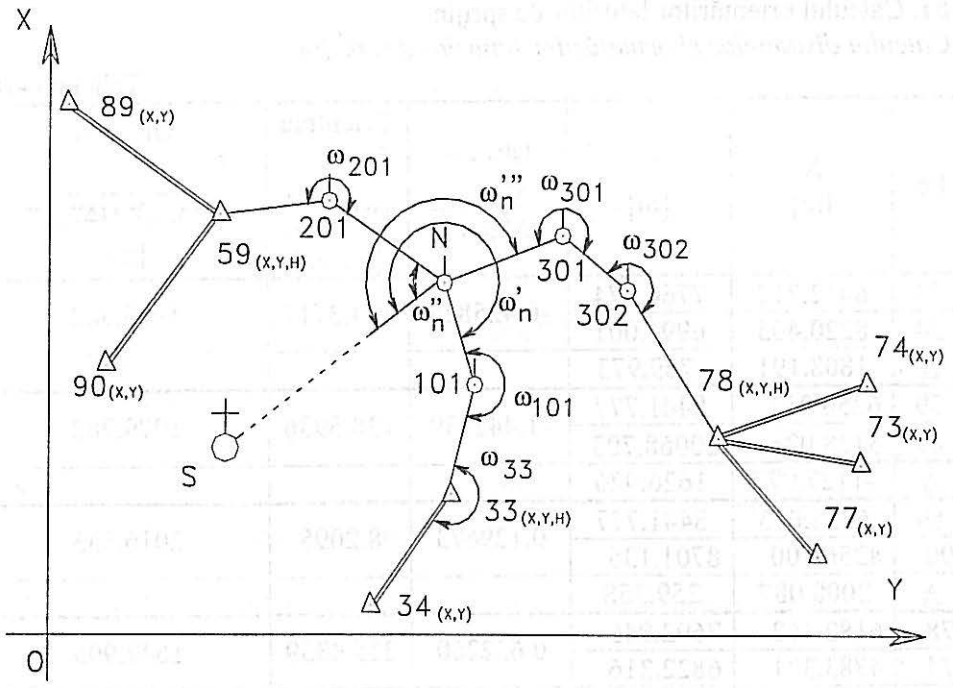


Figura 6.18
Exemplu de drumuire cu punct nodal

3. Etape de calcul:

a. Calculul distanțelor orizontale

$$
\begin{aligned}
D_{33-101} &= L_{33-101} * \cos\alpha_{33-101} = 188.694 * \cos(-1.3071) = 188.654\text{m} \\
D_{101-N} &= L_{101-N} * \cos\alpha_{101-N} = 202.252 * \cos(-2.0703) = 202.145\text{m} \\
D_{59-201} &= L_{59-201} * \cos\alpha_{59-201} = 155.714 * \cos(-2.9782) = 155.544\text{m} \\
D_{201-N} &= L_{201-N} * \cos\alpha_{201-N} = 282.419 * \cos(0.4159) = 282.413\text{m} \qquad (6.120) \\
D_{78-302} &= L_{78-302} * \cos\alpha_{78-302} = 152.999 * \cos(1.0238) = 152.979\text{m} \\
D_{302-301} &= L_{302-301} * \cos\alpha_{302-301} = 169.112 * \cos(-2.2179) = 169.009\text{m} \\
D_{301-N} &= L_{301-N} * \cos\alpha_{301-N} = 177.831 * \cos(-1.5585) = 177.778\text{m}
\end{aligned}
$$

b. Calculul orientărilor laturilor de sprijin şi compensarea lor

b1. Calculul orientărilor laturilor de sprijin

Calculul distanţelor şi orientărilor laturilor de sprijin

Tabelul 6-10

Pct	X [m]	Y [m]	$tg\theta_{55-59} = \frac{\Delta Y_{55-59}}{\Delta X_{55-59}}$	Orientrea $\theta_{55-59} = arctg\frac{\Delta Y_{55-59}}{\Delta X_{55-59}}$ [g c cc]	Distanţa $D_{55-59} = \sqrt{(\Delta X_{55-59})^2 + (\Delta Y_{55-59})^2}$ [m]
33	6412.212	7760.974	-0.425825	374.3717	1965.302
34	8220.403	6991.001			
Δ	1808.191	-769.973			
59	6256.013	8441.777	-1.442339	138.5936	1979.702
89	5128.036	10068.703			
Δ	-1127.977	1626.926			
59	6256.013	8441.777	0.129673	8.2095	2016.833
90	8256.100	8701.135			
Δ	2000.087	259.358			
78	6182.462	7692.945	0.622260	235.4359	1647.905
74	4783.321	6822.316			
Δ	-1399.141	-870.629			
78	6182.462	7692.945	-0.014640	199.0681	1855.741
73	4326.920	7720.110			
Δ	-1855.542	25.165			
78	6182.462	7692.945	-3.545556	317.5008	1648.459
77	6629.941	6106.383			
Δ	447.479	-1586.562			

b2. Calculul unghiurilor de orientare al staţiilor

$$\alpha'_{59} = \theta_{59-89} - dir_{89} = 138.5936 - 210.9987 = 327^{G}.5949$$
$$\alpha''_{59} = \theta_{59-90} - dir_{90} = 8.2095 - 80.6210 = 327^{G}.5885 \qquad (6.121)$$

$$p_1 = D_{59-89[Km]} = 1.980$$
$$p_2 = D_{59-90[Km]} = 2.017 \qquad (6.122)$$

$$\alpha_{59} = \frac{\alpha'_{59-89} * p_1 + \alpha''_{59-90} * p_2}{p_1 + p_2} = \frac{327.5949*1.980+327.5885*2.017}{1.980+2.017} = 327.5917 \quad (6.123)$$

$$\begin{aligned} \alpha'_{78} &= \theta_{78-74} - dir_{74} = 235.4359 - 338.5856 + 400 = 296^{G}.8503 \\ \alpha''_{78} &= \theta_{78-73} - dir_{73} = 199.0681 - 302.2112 + 400 = 296^{G}.8569 \\ \alpha'''_{78} &= \theta_{78-77} - dir_{77} = 317.5008 - 20.6570 = 296^{G}.8438 \end{aligned} \quad (6.124)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= D_{78-74[Km]} = 1.648 \\ p_2 &= D_{78-73[Km]} = 1.856 \\ p_3 &= D_{78-77[Km]} = 1.648 \end{aligned} \quad (6.125)$$

$$\alpha_{78} = \frac{\alpha'_{78} * p_1 + \alpha''_{78} * p_2 + \alpha'''_{78} * p_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \quad (6.126)$$

$$= \frac{296.8503 * 1.648 + 296.8569 * 1.856 + 296.8438 * 1.648}{1.648 + 1.856 + 1.648} = 296^{G}.8506$$

b3. Calculul orientărilor provizorii (transmiterea orientărilor)

$$\begin{aligned} \theta'_{33-101} &= \theta_{33-34} - \omega_{33} = 374.3717 - 198.9458 = 175^{G}.4259 \\ \theta'_{101-N} &= \theta'_{33-101} + 200 - \omega_{101} = 175.4259 + 200 - 299.9381 = 75^{G}.4878 \\ \theta'^{(1)}_{N-S} &= \theta'_{101-N} + 200 - \omega_{N_1} = 75.4878 + 200 - 221.2438 = 54^{G}.2440 \end{aligned} \quad (6.127)$$

$$\begin{aligned} \theta'_{59-201} &= \alpha_{59} + dir_{201} = 327.5917 + 361.0561 - 400 = 288^{G}.6478 \\ \theta'_{201-N} &= \theta'_{59-201} + 200 - \omega_{201} = 288.6478 + 200 - 169.2323 = 319^{G}.4155 \\ \theta'^{(2)}_{N-S} &= \theta'_{201-N} + 200 - \omega_{N_2} = 319.4155 - 200 - 65.1670 = 54^{G}.2485 \end{aligned} \quad (6.128)$$

$$\begin{aligned} \theta'_{78-301} &= \alpha_{78} + dir_{301} = 296.8506 + 227.5262 - 400 = 124^{G}.3768 \\ \theta'_{301-302} &= \theta'_{78-301} + 200 - \omega_{301} = 124.3768 + 200 - 228.4993 = 95^{G}.8775 \\ \theta'_{302-N} &= \theta'_{301-302} + 200 - \omega_{302} = 95.8775 + 200 - 290.1707 = 5^{G}.7068 \\ \theta'^{(3)}_{N-S} &= \theta'_{302-N} + 200 - \omega_{N_3} = 5.7068 + 200 - 151.4716 = 54^{G}.2352 \end{aligned} \quad (6.129)$$

b4. Calculul orientării θ_{N-S} folosind media ponderată

$$p_1 = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{3} = 0.333$$
$$p_2 = \frac{1}{n_2} = \frac{1}{3} = 0.333$$
$$p_3 = \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} = 0.250$$

n_1 = numărul de statii al drumuirii 1
n_2 = numărul de statii al drumuirii 2
n_3 = numărul de statii al drumuirii 3 (6.130)

$$\theta^{o}_{N-S} = \frac{\theta'^{(1)}_{N-S} * p_1 + \theta'^{(2)}_{N-S} * p_2 + \theta'^{(3)}_{N-S} * p_3}{p_1 + p_2 + p_3} =$$
$$= \frac{54.2440 * 0.333 + 54.2485 * 0.333 + 54.2352 * 0.250}{0.333 + 0.333 + 0.250} = 54^{G}.2432 \quad (6.131)$$

b5. Calculul corecțiilor pe orientări

$$c^{(1)}_{\Theta} = \theta^{o}_{N-S} - \theta^{(1)}_{N-S} = 54.2432 - 54.2440 = -0^{G}.0008$$
$$c^{(2)}_{\Theta} = \theta^{o}_{N-S} - \theta^{(2)}_{N-S} = 54.2432 - 54.2485 = -0^{G}.0053 \quad (6.132)$$
$$c^{(3)}_{\Theta} = \theta^{o}_{N-S} - \theta^{(3)}_{N-S} = 54.2432 - 542352 = 0^{G}.0080$$

b6. Calculul corecțiilor unitare

$$k^{(1)}_{\Theta} = \frac{c^{(1)}_{\Theta}}{n_1} = \frac{-0.0008}{3} = -0^{G}.0003$$
$$k^{(2)}_{\Theta} = \frac{c^{(2)}_{\Theta}}{n_1} = \frac{-0.0053}{3} = -0^{G}.0018 \quad (6.133)$$
$$k^{(3)}_{\Theta} = \frac{c^{(3)}_{\Theta}}{n_1} = \frac{0.0080}{4} = 0^{G}.0020$$

b7. Calculul orientărilor definitive pe fiecare drumuire

$$\theta_{33-101} = \theta'_{33-101} + k^{(1)}_{\Theta} = 175.4259 + (-0.0003) = 175^{G}.4256$$
$$\theta_{101-N} = \theta'_{101-N} + 2k^{(1)}_{\Theta} = 75.4878 + 2 * (-0.0003) = 75^{G}.4873 \quad (6.134)$$
$$\theta^{(1)}_{N-S} = \theta'^{(1)}_{N-S} + 3k^{(1)}_{\Theta} = 54.2440 + 3 * (-0.0003) = 54^{G}.2432$$

$$\theta_{59-201} = \theta'_{59-201} + k_{\Theta}^{(2)} = 288.6478 + (-0.0018) = 288^{G}.6460$$
$$\theta_{201-N} = \theta'_{201-N} + 2k_{\Theta}^{(2)} = 319.4155 + 2*(-0.0018) = 319^{G}.4120 \quad (6.135)$$
$$\theta_{N-S}^{(2)} = \theta'^{(2)}_{N-S} + 3k_{\Theta}^{(2)} = 54.2485 + 3*(-0.0018) = 54^{G}.2432$$

$$\theta_{78-301} = \theta'_{78-301} + k_{\Theta}^{(3)} = 124.3768 + 0.0020 = 124^{G}.3788$$
$$\theta_{301-302} = \theta'_{301-302} + 2k_{\Theta}^{(3)} = 95.8775 + 2*0.0020 = 95^{G}.8815 \quad (6.136)$$
$$\theta_{302-N} = \theta'_{302-N} + 3k_{\Theta}^{(3)} = 5.7068 + 3*0.0020 = 5^{G}.7128$$
$$\theta_{N-S}^{(3)} = \theta'^{(3)}_{N-S} + 4k_{\Theta}^{(3)} = 54.2432 + 4*0.0020 = 54^{G}.2432$$

Control:

$$\theta_{N-S}^{(1)} = \theta_{N-S}^{(2)} = \theta_{N-S}^{(3)} = \theta_{N-S}^{O} \quad (6.137)$$

c. Calculul creşterilor de coordonate provizorii şi compensarea lor

c1. Calculul creşterilor de coordonate pe fiecare drumuire

$$\delta x'_{33-101} = D_{33-101}\cos\theta_{33-101} = 188.564*\cos 175.4256 = -174.773\text{m}$$
$$\delta x'_{101-N} = D_{101-N}\cos\theta_{101-N} = 202.145*\cos 75.4873 = 75.926\text{m} \quad (6.138)$$
$$\sum \delta x'^{(1)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\cos\theta_{i-j} = -174.773 + 75.926 = -98.847\text{m}$$

$$\delta y'_{33-101} = D_{33-101}\sin\theta_{33-101} = 188.564*\sin 175.4256 = 71.028\text{m}$$
$$\delta y'_{101-N} = D_{101-N}\sin\theta_{101-N} = 202.145*\sin 75.4873 = 187.344\text{m} \quad (6.139)$$
$$\sum \delta y'^{(1)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\sin\theta_{i-j} = 71.028 + 187.344 = 258.372\text{m}$$

$$\delta h'_{33-101} = D_{33-101}\text{tg}\alpha_{33-101} = 188.654*\text{tg}(-1.3071) = -3.874\text{m}$$
$$\delta h'_{101-N} = D_{101-N}\text{tg}\alpha_{101-N} = 202.145*\text{tg}(-2.0703) = -6.576\text{m} \quad (6.140)$$
$$\sum \delta h'^{(1)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\text{tg}\alpha_{i-j} = -3.874 + (-6.576) = -10.450\text{m}$$

$$\delta x'_{59-201} = D_{59-201}\cos\theta_{59-201} = 155.544*\cos 288.6460 = -27.594\text{m}$$
$$\delta x'_{201-N} = D_{201-N}\cos\theta_{201-N} = 282.413*\cos 319.4120 = 84.786\text{m} \quad (6.141)$$
$$\sum \delta x'^{(2)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\cos\theta_{i-j} = -27.594 + 84.786 = 57.192\text{m}$$

$$\delta y'_{59-201} = D_{59-201}\sin\theta_{59-201} = 155.544 * \cos 288.6460 = -153.076\text{m}$$
$$\delta y'_{201-N} = D_{201-N}\sin\theta_{201-N} = 282.413 * \cos 319.4120 = -269.385\text{m} \quad (6.142)$$
$$\sum \delta y'^{(2)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\sin\theta_{i-j} = -153.076 + (-269.385) = -422.461\text{m}$$

$$\delta h'_{59-201} = D_{59-201}\,tg\alpha_{59-201} = 155.544 * tg(-2.9782) = -7.282\text{m}$$
$$\delta h'_{201-N} = D_{201-N}\,tg\alpha_{201-N} = 282.413 * tg0.4159 = 1.845\text{m} \quad (6.143)$$
$$\sum \delta h'^{(2)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\,tg\alpha_{i-j} = -7.282 + 1.845 = -5.437\text{m}$$

$$\delta x'_{78-301} = D_{78-301}\cos\theta_{78-301} = 152.979 * \cos 124.3788 = -57.161\text{m}$$
$$\delta x'_{301-302} = D_{301-302}\cos\theta_{301-302} = 169.009 * \cos 5.7128 = 10.926\text{m}$$
$$\delta x'_{302-N} = D_{302-N}\cos\theta_{302-N} = 177.778 * \cos 54.2432 = 177.062\text{m} \quad (6.144)$$
$$\sum \delta x'^{(3)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\cos\theta_{i-j} = -57.161 + 10.926 + 177.062 = 130.827\text{m}$$

$$\delta y'_{78-301} = D_{78-301}\sin\theta_{78-301} = 152.979 * \sin 124.3788 = 141.899\text{m}$$
$$\delta y'_{301-302} = D_{301-302}\sin\theta_{301-302} = 169.009 * \sin 5.7128 = 168.656\text{m}$$
$$\delta y'_{302-N} = D_{302-N}\sin\theta_{302-N} = 177.778 * \sin 54.2432 = 15.932\text{m} \quad (6.145)$$
$$\sum \delta y'^{(3)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\sin\theta_{i-j} = 141.899 + 168.656 + 15.932 = 326.487\text{m}$$

$$\delta h'_{78-301} = D_{78-301}\,tg\alpha_{78-301} = 152.979 * tg1.0238 = 2.460\text{m}$$
$$\delta h'_{301-302} = D_{301-302}\,tg\alpha_{301-302} = 169.009 * tg(-2.2179) = -5.890\text{m}$$
$$\delta h'_{302-N} = D_{302-N}\,tg\alpha_{302-N} = 177.778 * tg(-1.5585) = -4.353\text{m} \quad (6.146)$$
$$\sum \delta h'^{(3)}_{i-j} = \sum D_{i-j}\,tg\alpha_{i-j} = 2.460 + (-5.890) + (-4.353) = -7.783\text{m}$$

c2. Calculul coordonatelor provizorii ale punctului N

$$X_N^{(1)} = X_{33} + \sum \delta x'^{(1)}_{i-j} = 6412.212 + (-98.847) = 6313.365\text{m}$$
$$Y_N^{(1)} = Y_{33} + \sum \delta y'^{(1)}_{i-j} = 7760.974 + 258.372 = 8019.346\text{m} \quad (6.147)$$
$$H_N^{(1)} = H_{33} + \sum \delta h'^{(1)}_{i-j} = 367.683 + (-10.450) = 357.233\text{m}$$

$$X_N^{(2)} = X_{59} + \sum \delta x'^{(2)}_{i-j} = 6256.013 + 57.192 = 6313.205\text{m}$$
$$Y_N^{(2)} = Y_{59} + \sum \delta y'^{(2)}_{i-j} = 8441.777 + (-422.461) = 8019.316\text{m} \quad (6.148)$$
$$H_N^{(2)} = H_{59} + \sum \delta h'^{(2)}_{i-j} = 362.643 + (-5.437) = 357.206\text{m}$$

$$X_N^{(3)} = X_{78} + \sum \delta x_{i-j}'^{(3)} = 6182.462 + 130.827 = 6313.289\text{m}$$
$$Y_N^{(3)} = Y_{78} + \sum \delta y_{i-j}'^{(3)} = 7692.945 + 326.487 = 8019.432\text{m} \qquad (6.149)$$
$$H_N^{(3)} = H_{78} + \sum \delta h_{i-j}'^{(3)} = 365.160 - 7.783 = 357.377\text{m}$$

c3. Calculul coordonatelor absolute ale punctului N

$$p_1 = \frac{1}{\sum D_{i-j}^{(1)}} = \frac{1}{188.654 + 202.145} = 0.0026$$
$$p_2 = \frac{1}{\sum D_{i-j}^{(2)}} = \frac{1}{155.544 + 282.413} = 0.0023 \qquad (6.150)$$
$$p_3 = \frac{400}{\sum D_{i-j}^{(3)}} = \frac{1}{152.979 + 169.009 + 177.778} = 0.0020$$

$$X_N = \frac{X_N^{(1)} * p_1 + X_N^{(2)} * p_2 + X_N^{(3)} * p_3}{p_1 + p_2 + p_3} =$$
$$= \frac{6313.365 * 0.0026 + 6313.205 * 0.0023 + 6313.289 * 0.0020}{0.0026 + 0.0023 + 0.0020} = 6313.290\text{m}$$
$$Y_N = \frac{Y_N^{(1)} * p_1 + Y_N^{(2)} * p_2 + Y_N^{(3)} * p_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \qquad (6.151)$$
$$= \frac{8019.346 * 0.0026 + 8019.316 * 0.0023 + 8019.432 * 0.0020}{0.0026 + 0.0023 + 0.0020} = 8019.361\text{m}$$
$$H_N = \frac{H_N^{(1)} * p_1 + H_N^{(2)} * p_2 + H_N^{(3)} * p_3}{p_1 + p_2 + p_3} =$$
$$\frac{357.233 * 0.0026 + 357.206 * 0.0023 + 357.377 * 0.0020}{0.0026 + 0.0023 + 0.0020} = 357.266\text{m}$$

c4. Calculul corecțiilor pe creșterile de coordonate

$$c_x^{(1)} = X_N - X_N^{(1)} = 6313.290 - 6313.365 = -0.075\text{m}$$
$$c_y^{(1)} = Y_N - Y_N^{(1)} = 8019.361 - 8019.346 = 0.015\text{m}$$
$$c_h^{(1)} = H_N - H_N^{(1)} = 357.266 - 357.233 = 0.033\text{m}$$

$$
\begin{aligned}
c_x^{(2)} &= X_N - X_N^{(2)} = 6313.290 - 6313.205 = 0.085 \\
c_y^{(2)} &= Y_N - Y_N^{(2)} = 8019.361 - 8019.316 = 0.045\text{m} \\
c_h^{(2)} &= H_N - H_N^{(2)} = 357.266 - 357.206 = 0.060\text{m} \\
c_x^{(3)} &= X_N - X_N^{(3)} = 6313.290 - 6313.289 = 0.001\text{m} \\
c_y^{(3)} &= Y_N - Y_N^{(3)} = 8019.361 - 8019.432 = -0.071\text{m} \\
c_h^{(3)} &= H_N - H_N^{(3)} = 357.266 - 357.377 = -0.111\text{m}
\end{aligned}
\qquad (6.152)
$$

c5. Calculul corecțiilor unitare

$$
\begin{aligned}
k_x^{(1)} &= \frac{c_x^{(1)}}{D^{(1)}} = \frac{-75}{3.90799} = -19.2[\text{mm}/100\text{m}] \\
k_y^{(1)} &= \frac{c_y^{(1)}}{D^{(1)}} = \frac{15}{3.90799} = 3.8[\text{mm}/100\text{m}] \\
k_h^{(1)} &= \frac{c_h^{(1)}}{D^{(1)}} = \frac{33}{3.90799} = 8.4[\text{mm}/100\text{m}]
\end{aligned}
\qquad (6.153)
$$

$$
\begin{aligned}
k_x^{(2)} &= \frac{c_x^{(2)}}{D^{(2)}} = \frac{85}{4.37957} = 19.4[\text{mm}/100\,\text{m}] \\
k_y^{(2)} &= \frac{c_y^{(2)}}{D^{(2)}} = \frac{45}{4.37957} = 10.3[\text{mm}/100\,\text{m}] \\
k_h^{(2)} &= \frac{c_h^{(2)}}{D^{(2)}} = \frac{60}{4.37957} = 13.7[\text{mm}/100\,\text{m}]
\end{aligned}
\qquad (6.154)
$$

$$
\begin{aligned}
k_x^{(3)} &= \frac{c_x^{(3)}}{D^{(3)}} = \frac{1}{4.99766} = 0.2[\text{mm}/100\text{m}] \\
k_y^{(3)} &= \frac{c_y^{(3)}}{D^{(3)}} = \frac{-71}{4.99766} = -14.2[\text{mm}/100\text{m}] \\
k_h^{(3)} &= \frac{c_h^{(3)}}{D^{(3)}} = \frac{-111}{4.99766} = -22.2[\text{mm}/100\text{m}]
\end{aligned}
\qquad (6.155)
$$

c6. Calculul creșterilor de coordonate compensate

$$
\begin{aligned}
\delta x_{33-101} &= \delta x'_{33-101} + k_x^{(1)} * D_{33-101} = -174.773 + (-19.2) * 1.88654 = -174.809\text{m} \\
\delta x_{101-N} &= \delta x'_{101-N} + k_x^{(1)} * D_{101-N} = 75.926 + (-19.2) * 2.02145 = 75.887\text{m}
\end{aligned}
\qquad (6.156)
$$

$$\delta y_{33-101} = \delta y'_{33-101} + k_y^{(1)} * D_{33-101} = 71.028 + 3.8 * 1.88645 = 71.035m$$
$$\delta y_{101-N} = \delta y'_{101-N} + k_y^{(1)} * D_{101-N} = 187.344 + 3.8 * 2.02145 = 187.352m \quad (6.157)$$

$$\delta h_{33-101} = \delta h'_{33-101} + k_h^{(1)} * D_{33-101} = -3.874 + 8.4 * 1.88654 = -3.858m$$
$$\delta h_{101-N} = \delta h'_{101-N} + k_h^{(1)} * D_{101-N} = -6.576 + 8.4 * 2.02145 = -6.559m \quad (6.158)$$

$$\delta x_{59-201} = \delta x'_{59-201} + k_x^{(2)} * D_{59-201} = -27.594 + 19.4 * 1.55544 = -27.564m$$
$$\delta x_{201-N} = \delta x'_{201-N} + k_x^{(2)} * D_{201-N} = 84.786 + 19.4 * 2.82413 = 84.841m \quad (6.159)$$

$$\delta y_{59-201} = \delta y'_{59-201} + k_y^{(2)} * D_{59-201} = 153.076 + 10.3 * 1.55544 = -153.060m$$
$$\delta y_{201-N} = \delta y'_{201-N} + k_y^{(2)} * D_{201-N} = -269.385 + 10.3 * 2.82413 = -269.356m \quad (6.160)$$

$$\delta h_{59-201} = \delta h'_{59-201} + k_h^{(2)} * D_{59-201} = -7.282 + 13.7 * 1.55544 = -7.261m$$
$$\delta h_{201-N} = \delta h'_{201-N} + k_h^{(2)} * D_{201-N} = 1.845 + 13.7 * 2.82413 = 1.884m \quad (6.161)$$

$$\delta x_{78-301} = \delta x'_{78-301} + k_x^{(3)} * D_{78-301} = -57.161 + 0.2 * 1.52979 = -57.161m$$
$$\delta x_{301-302} = \delta x'_{301-302} + k_x^{(3)} * D_{301-302} = 10.926 + 0.2 * 1.69009 = 10.926m \quad (6.162)$$
$$\delta x_{302-N} = \delta x'_{302-N} + k_x^{(3)} * D_{302-N} = 177.062 + 0.2 * 1.77778 = 177.063m$$

$$\delta y_{78-301} = \delta y'_{78-301} + k_y^{(3)} * D_{78-301} = 141.899 + (-14.2) * 1.52979 = 141.877m$$
$$\delta y_{301-302} = \delta y'_{301-302} + k_y^{(3)} * D_{301-302} = 168.656 + (-14.2) * 1.69009 = 168.632m \quad (6.163)$$
$$\delta y_{302-N} = \delta y'_{302-N} + k_y^{(3)} * D_{302-N} = 15.932 + (-14.2) * 1.77778 = 15.907m$$

$$\delta h_{78-301} = \delta h'_{78-301} + k_h^{(3)} * D_{78-301} = 2.460 + (-22.2) * 1.52979 = 2.426m$$
$$\delta h_{301-302} = \delta h'_{301-302} + k_h^{(3)} * D_{301-302} = -5.890 + (-22.2) * 1.69009 = -5.928m \quad (6.164)$$
$$\delta h_{302-N} = \delta h'_{302-N} + k_h^{(3)} * D_{302-N} = -4.353 + (-22.2) * 1.77778 = -4.392m$$

d. Calculul coordonatelor absolute

$$X_{101} = X_{33} + \delta x_{33-101} = 6412.212 + (-174.809) = 6237.403m$$
$$X_N = X_{101} + \delta x_{101-N} = 6237.403 + 75.887 = 6313.290m \quad (6.165)$$

$$X_{201} = X_{59} + \delta x_{59-201} = 6256.013 + (-27.594) = 6228.449\text{m}$$
$$X_N = X_{201} + \delta x_{201-N} = 6228.449 + 84.841 = 6313.290\text{m} \quad (6.166)$$

$$X_{301} = X_{78} + \delta x_{78-301} = 6182.462 + (-57.161) = 6125.301\text{m}$$
$$X_{302} = X_{301} + \delta x_{301-302} = 6125.301 + 10.926 = 6136.227\text{m} \quad (6.167)$$
$$X_N = X_{302} + \delta x_{302-N} = 6136.227 + 177.063 = 6313.290\text{m}$$

$$Y_{101} = Y_{33} + \delta y_{33-101} = 7760.974 + 71.035 = 7832.009\text{m}$$
$$Y_N = Y_{101} + \delta y_{101-N} = 7832.009 + 187.352 = 8019.361\text{m} \quad (6.168)$$

$$Y_{201} = Y_{59} + \delta y_{59-201} = 8441.777 + (-153.060) = 8288.717\text{m}$$
$$Y_N = Y_{201} + \delta y_{201-N} = 8288.717 + (-269.356) = 8019.361\text{m} \quad (6.169)$$

$$Y_{301} = Y_{78} + \delta y_{78-301} = 7692.945 + 141.877 = 7834.823\text{m}$$
$$Y_{302} = Y_{301} + \delta y_{301-302} = 7834.823 + 168.632 = 8003.454\text{m} \quad (6.170)$$
$$Y_N = Y_{302} + \delta y_{302-N} = 8003.454 + 15.907 = 8019.361\text{m}$$

$$H_{101} = H_{33} + \delta h_{33-101} = 367.683 + (-3.858) = 363.825\text{m}$$
$$H_N = H_{101} + \delta h_{101-N} = 363.825 + (-6.559) = 357.266\text{m} \quad (6.171)$$

$$H_{201} = H_{59} + \delta h_{59-201} = 362.643 + (-7.261) = 355.382\text{m}$$
$$H_N = H_{201} + \delta h_{201-N} = 355.382 + 1.884 = 357.266\text{m} \quad (6.172)$$

$$H_{301} = H_{78} + \delta h_{78-301} = 365.160 + 2.426 = 367.586\text{m}$$
$$H_{302} = H_{301} + \delta h_{301-302} = 367.586 + (-5.928) = 361.659\text{m} \quad (6.173)$$
$$H_N = H_{302} + \delta h_{302-N} = 361.659 + (-4.392) = 361.266\text{m}$$

Calculul coordonatelor punctelor de drumuire şi a punctelor radiate

Tabel 6-11

STATIA	PUNCTE VIZATE	Distanţe înclinate		Unghiuri verticale α			SinαCosα / $Cos^2\alpha$	Unghiuri orizontale ω			Orientări θ CALCULATE / CORECTII / COMPENSATE			Sinθ / Cosθ
		m	cm	G	C	CC	Tgα	G	C	CC	G	C	CC	
1	2	3		4			5	6			7			8
33											**374**	**37**	**17**	
	101	188	694	-1	30	71		198	94	58	175	42	59	
												-0	03	
											175	**42**	**56**	
101														
	N	202	252	-2	07	03		299	93	81	75	48	78	
												-0	05	
											75	**48**	**73**	
N														
	S							221	24	38	54	24	40	
												-0	08	
											54	**24**	**32**	
59											288	64	78	
	201	155	714	-2	97	82						-0	18	
											288	**64**	**60**	
201														
	N	282	419	0	41	59		169	23	23	319	41	55	
												-0	35	
											319	**41**	**20**	
N														
	S							65	16	70	54	24	85	
												-0	53	
											54	**24**	**32**	
78											124	37	68	
	301	152	999	1	02	38						0	20	
											124	**37**	**88**	
301														
	302	169	112	-2	21	79		228	49	93	95	87	75	
												0	40	
											95	**88**	**15**	
302														
	N	177	831	-1	55	85		290	17	07	5	70	68	
												0	60	
											5	**71**	**28**	
N														
	S							151	47	16	54	23	52	
												0	80	
											54	**24**	**32**	

Calculul coordonatelor punctelor de drumuire şi a punctelor radiate

Tabel 6-12

Distanţe orizontale		COORDONATE RELATIVE						COORDONATE ABSOLUTE						NR.PUNCT	Observaţii
		± ΔX		± ΔY		± ΔH		X		Y		H			
		Calculate		Calculate		Calculate									
		Corecţii		Corecţii		Corecţii									
		Compensate		Compensate		Compensate									
m	cm	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm		
9		10		11		12		13		14		15		16	17
								6412	*212*	*7760*	*974*	*367*	*683*	33	
188	654	-174	773	71	028	-3	874								
		-0	036	0	007	0	016	*6237*	*403*	*7832*	*009*	*363*	*825*	101	
		-174	809	71	035	-3	858								
202	145	75	926	187	344	-6	576								
		-0	039	0	008	0	017	*6313*	*290*	*8019*	*361*	*357*	*266*	N	
		75	887	187	352	-6	559								
		$e_x = 0.075$		$e_y = -0.015$		$e_h = -0.033$									
		$c_x = -0.075$		$c_y = 0.015$		$c_h = 0.033$									
		T_1=0.314				$T_{h1} = 0.125$									
								6256	*013*	*8441*	*777*	*362*	*643*	59	
155	544	-27	594	-153	076	-7	282								
		0	030	0	016	0	021	*6228*	*449*	*8288*	*717*	*355*	*382*	201	
		-27	564	-153	060	-7	261								
282	413	84	786	-269	385	1	845								
		0	055	0	029	0	039	*6313*	*290*	*8019*	*361*	*357*	*266*	N	
		84	841	-269	356	1	884								
		$e_x = -0.085$		$e_y = -0.045$		$e_h = -0.060$									
		$c_x = 0.085$		$c_y = 0.045$		$c_h = 0.060$									
		T_2=0.347				$T_{h2} = 0.132$									
								6182	*462*	*7692*	*945*	*365*	*160*	78	
152	979	-57	161	141	899	2	460								
		0	000	-0	022	-0	034	*6125*	*301*	*7834*	*823*	*367*	*586*	301	
		-57	161	141	877	2	426								
169	009	10	926	168	656	-5	890								
		0	000	-0	024	-0	038	*6136*	*227*	*8003*	*454*	*361*	*659*	302	
		10	926	168	632	-5	928								
177	778	177	062	15	932	-4	353								
		0	000	-0	025	-0	039	*6313*	*290*	*8019*	*361*	*357*	*266*	N	
		177	062	15	907	-4	392								
		$e_x = 0.001$		$e_y = 0.071$		$e_h = 0.111$									
		$c_x = 0.001$		$c_y = -0.071$		$c_h = -0.111$									
		T_3=0.389				$T_{h3} = 0.141$									

6.3.4. Drumuirea închisă pe punctul de plecare

1. Date inițiale:

Punctele vechi (de coordonate cunoscute) A, B, şi C sunt marcate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. (fig. 6.19).

Punctele 1, 2, ... n-1 sunt marcate, nu au coordonate cunoscute şi pentru ele dorim să obținem coordonatele X, Y şi H.

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie pentru măsurarea direcțiilor orizontale şi verticale. Cu ajutorul acestor direcții se determină unghiurile orizontale ω_i şi unghiurile verticale α_i. Se măsoară lungimile înclinate L_{ij} ale laturilor de drumuire direct cu panglica sau electronic.

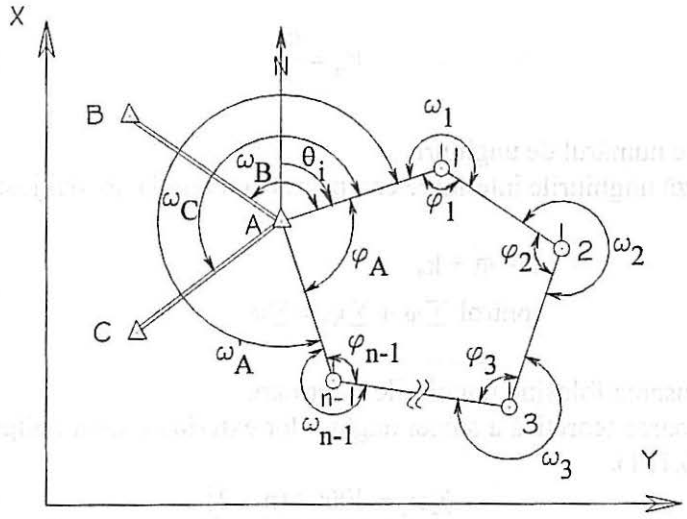


Figura 6.19
Drumuire închisă pe punctul de plecare

3. Etape de calcul:

a. Calculul distanțelor orizontale

$$D_{ij} = L_{ij} * \cos\alpha_{ij} \qquad (6.174)$$

b. Compensarea unghiurilor în poligonul A, 1, 2, n-1

b1. Compensarea folosind unghiurile interioare

Se calculează valoarea teoretică a unghiurilor într-un poligon

$$\sum\varphi_i = 200^g * (n-2) \qquad (6.175)$$

Se calculează suma unghiurilor interioare măsurate în poligon:

$$\sum \varphi'_i = \varphi'_1 + \varphi'_2 + ... + \varphi'_A \qquad (6.176)$$

Se calculează eroarea de neînchidere pe unghiuri:

$$e_\varphi = v_e - v_j = \sum \varphi'_i - \sum \varphi_i \qquad (6.177)$$

Corecția pentru unghiurile interioare:

$$c_\varphi = v_j - v_e = -e_\varphi \qquad (6.178)$$

Se calculează corecția unitară pentru unghiurile interioare:

$$k_\varphi = \frac{c_\varphi}{n} \qquad (6.179)$$

- unde n este numărul de unghiuri.

Se calculează unghiurile interioare compensate cu relația de mai jos:

$$\varphi_i = \varphi'_i + k_\varphi$$
$$\text{control } \sum \varphi'_i + \sum k_\varphi = \sum \varphi \qquad (6.180)$$

b2. Compensarea folosind unghiurile exterioare

Valoarea teoretică a sumei unghiurilor exterioare unui poligon este dată de relația (6.181).

$$\sum \omega_i = 200^g * (n+2) \qquad (6.181)$$

Se calculează suma unghiurilor exterioare măsurate în poligon:

$$\sum \omega'_i = \omega'_1 + \omega'_2 + ... + \omega'_A \qquad (6.182)$$

Compensarea unghiurilor exterioare se face identic cu cea a unghiurilor interioare prezentată la subpunctul (b1).

c. Calculul unghiului de orientare al stației A

$$\alpha'_A = \theta_{AB} - dir_B$$
$$\alpha''_A = \theta_{AC} - dir_C \qquad (6.183)$$

$$\alpha_A = \frac{\alpha'_A * p_1 + \alpha''_A * p_2}{p_1 + p_2} \qquad (6.183a)$$

unde:

$$p_1 = D_{A-B[Km]}$$
$$p_2 = D_{A-B[Km]} \qquad (6.183b)$$

d. Calculul orientărilor laturilor drumuirii

d1. Folosind unghiurile interioare

$$\begin{aligned}
\theta_{A-1} &= \alpha_A + dir_1 \\
\theta_{1-2} &= \theta_{A-1} - \varphi_1 + 200^G \\
\theta_{2-3} &= \theta_{2-3} - \varphi_2 + 200^G \\
&\text{----------} \\
\theta_{n-1-A} &= \theta_{n-1-A} - \varphi_A + 200^G
\end{aligned} \qquad (6.184)$$

d2. Folosind unghiurile exterioare

$$\begin{aligned}
\theta_{A-1} &= \alpha_A + dir_1 \\
\theta_{1-2} &= \theta_{A,1} + \omega_1 - 200^G \\
\theta_{2-3} &= \theta_{2,3} + \omega_2 - 200^G \\
&\text{----------} \\
\theta_{n-1-A} &= \theta_{n-1-A} + \omega_A - 200^G
\end{aligned} \qquad (6.185)$$

e. Calculul coordonatelor relative şi compensarea lor

e1. Calculul coordonatelor relative provizorii

$$\begin{array}{lll}
\delta x'_{1,2} = d_{1,2}\cos\theta_1 & \delta y'_{1,2} = d_{1,2}\sin\theta_1 & \delta hy_{1,2} = d_{1,2}\,tg\,\alpha_1 \\
\delta x'_{2,3} = d_{2,3}\cos\theta_2 & \delta y'_{2,3} = d_{2,3}\sin\theta_2 & \delta hy_{2,3} = d_{2,3}\,tg\,\alpha_2 \\
\text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\
\underline{\delta x'_{n-1,n} = d_{n-1,n}\cos\theta_{n-1}} & \underline{\delta y'_{n-1,n} = d_{n-1,n}\sin\theta_{n-1}} & \underline{\delta hy_{n-1,n} = d_{n-1,n}\,tg\,\alpha_{n-1}} \\
\sum \delta x'_{ij} = \sum d_{ij}\cos\theta_i & \sum \delta y'_{ij} = \sum d_{ij}\sin\theta_i & \sum \delta y'_{ij} = \sum d_{ij}\,tg\,\alpha_i
\end{array} \qquad (6.186)$$

e2. Calculul neînchiderilor pe creşterile de coordonate şi al corecţiilor de închidere pe creşterile de coordonate

Suma creşterilor de coordonate într-un poligon trebuie să fie zero.

$$e_x = v_e - v_j = \sum \delta x'_{ij} - \Delta X_{BC} = \sum \delta x'_{ij} - 0 = \sum \delta x'_{ij}$$
$$e_y = v_e - v_j = \sum \delta y'_{ij} - \Delta Y_{BC} = \sum \delta y'_{ij} - 0 = \sum \delta y'_{ij} \qquad (6.187)$$
$$e_h = v_e - v_j = \sum \delta h'_{ij} - \Delta H_{BC} = \sum \delta h'_{ij} - 0 = \sum \delta h'_{ij}$$

- se calculează eroarea totală:

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \qquad (6.188)$$

- dacă:

$$e \le T$$
$$e_h \le T_h \qquad (6.189)$$

- unde T şi T_h sunt:

$$T = \pm\left(0{,}003\sqrt{\sum D_{ij}} + \frac{\sum D_{ij}}{5000}\right), \text{pentru intravilan si terenuri cu panta} < 5^g;$$
$$T = \pm\left(0{,}0045\sqrt{\sum D_{ij}} + \frac{\sum D_{ij}}{1733}\right), \text{pentru extravilan si terenuri cu panta} > 5^g; \qquad (6.190)$$
$$T_h = 0{,}2\sqrt{\sum D_{ij[km]}}.$$

Dacă condiţiile (6.19) sunt îndeplinite se calculează corecţiile c_x, c_y şi c_h:

$$c_x = v_j - v_e = -e_x$$
$$c_y = v_j - v_e = -e_y \qquad (6.191)$$
$$c_h = v_j - v_e = -e_h$$

e3. Calculul corecţiilor unitare

$$k_x = \frac{c_x}{\sum D_{ij}}\left[\text{mm}/100\,\text{m}\right]$$
$$k_y = \frac{c_y}{\sum D_{ij}}\left[\text{mm}/100\,\text{m}\right] \qquad (6.192)$$
$$k_h = \frac{c_h}{\sum D_{ij}}\left[\text{mm}/100\,\text{m}\right]$$

f. Calculul coordonatelor relative compensate

$$\begin{array}{lll} q_{x_{1,2}} = k_x * d_{1,2} & q_{y_{1,2}} = k_y * d_{1,2} & q_{h_{1,2}} = k_h * d_{1,2} \\ q_{x_{2,3}} = k_x * d_{2,3} & q_{y_{2,3}} = k_y * d_{2,3} & q_{h_{2,3}} = k_h * d_{2,3} \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\ \underline{q_{x_{n-1,n}} = k_x * d_{n-1,n}} & \underline{q_{y_{n-1,n}} = k_y * d_{n-1,n}} & \underline{q_{h_{n-1,n}} = k_h * d_{n-1,n}} \\ \sum q_{x_{ij}} = k_x * \sum d_{ij} = c_x & \sum q_{y_{ij}} = k_y * \sum d_{ij} = c_y & \sum q_{h_{ij}} = k_h * \sum d_{ij} = c_h \end{array} \quad (6.193)$$

$$\begin{array}{lll} \delta x_{1,2} = \delta x'_{1,2} + q_{x_{1,2}} & \delta y_{1,2} = \delta y'_{1,2} + q_{y_{1,2}} & \delta h_{1,2} = \delta h'_{1,2} + q_{h_{1,2}} \\ \delta x_{2,3} = \delta x'_{2,3} + q_{x_{2,3}} & \delta y_{2,3} = \delta y'_{2,3} + q_{y_{2,3}} & \delta h_{2,3} = \delta h'_{2,3} + q_{h_{2,3}} \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\ \underline{\delta x_{n-1,n} = \delta x'_{n-1,n} + q_{x_{n-1,n}}} & \underline{\delta y_{n-1,n} = \delta y'_{n-1,n} + q_{y_{n-1,n}}} & \underline{\delta h_{n-1,n} = \delta h'_{n-1,n} + q_{h_{n-1,n}}} \\ \sum \delta x_{ij} = \sum \delta x_i' + c_x = X_C - X_B & \sum \delta y_{ij} = \sum \delta y_i' + c_y = Y_C - Y_B & \sum \delta h_{ij} = \sum \delta h_i' + c_h = H_C - H_B \end{array} \quad (6.194)$$

g. Calculul coordonatelor absolute ale punctelor de drumuire

$$\begin{array}{lll} X_2 = X_1 + \delta x_{1,2} & Y_2 = Y_1 + \delta y_{1,2} & H_2 = H_1 + \delta h_{1,2} \\ X_3 = X_2 + \delta x_{2,3} & Y_3 = Y_2 + \delta y_{2,3} & H_3 = H_2 + \delta h_{2,3} \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\ X_n = X_{n-1} + \delta x_{n-1,n} & Y_n = Y_{n-1} + \delta y_{n-1,n} & H_n = H_{n-1} + \delta h_{n-1,n} \end{array} \quad (6.195)$$

6.3.5. Drumuirea sprijinită la capete numai pe puncte de coordonate cunoscute

1. Date inițiale:

Punctele vechi (de coordonate cunoscute) A și B sunt marcate, au fost recunoscute și identificate pe teren. (fig. 6.20).

Punctele 1, 2, ... n-1 sunt marcate, nu au coordonate cunoscute și pentru ele dorim să obținem coordonatele X, Y și H

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie pentru măsurarea direcțiilor orizontale și verticale. Cu ajutorul acestor direcții se determină unghiurile orizontale ω_i și unghiurile verticale α_i. Se măsoară lungimile înclinate L_{ij} ale laturilor de drumuire direct cu panglica sau electronic.

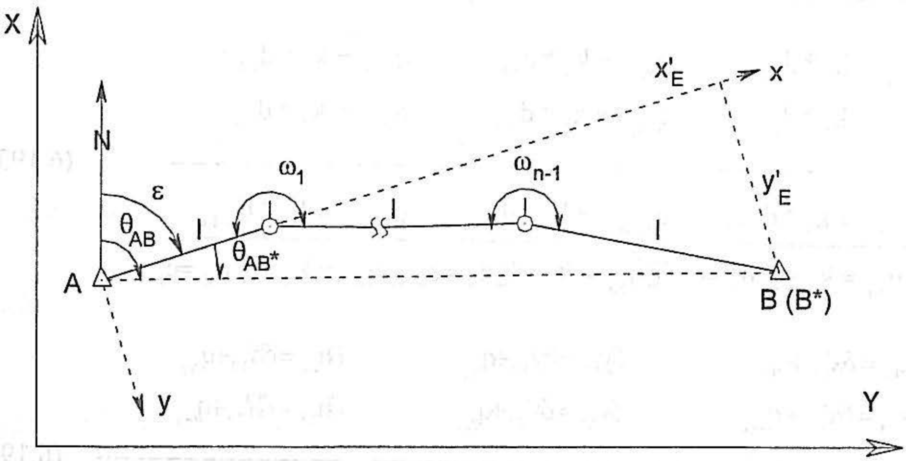


Figura 6.20
Drumuirea sprijinită la capete numai pe puncte de coordonate cunoscute

3. Etape de calcul:
a. Calculul distanțelor orizontale

$$D_{ij} = L_{ij} * \cos\alpha_{ij} \qquad (6.196)$$

b. Calculul orientărilor
Se consideră orientarea primei laturi $\theta_{A\text{-}1} = 0^G$, şi se transmite:

$$\begin{aligned} &\theta *_{A-1} = 0^g, \quad \text{- axa x in sistem local} \\ &\theta *_{1-2} = \theta *_{A-1} + \omega_1 + 200^g \\ &\text{-------------} \\ &\theta *_{n-1,B} = \theta *_{n-2,n-1} + \omega_{n-1} + 200^g \end{aligned} \qquad (6.197)$$

c. Calculul creşterilor de coordonate:

$$\begin{array}{lll} \delta x *_{A-1} = d_{A-1} * \cos\theta *_{A-1} & \delta y *_{A-1} = d_{A-1} * \sin\theta *_{A-1} & \delta h'_{A-1} = d_{A-1} * tg\alpha_{A-1} \\ \delta x *_{1-2} = d_{1-2} * \cos\theta *_{1-2} & \delta y *_{1-2} = d_{1-2} * \sin\theta *_{1-2} & \delta h'_{1-2} = d_{1-2} * tg\alpha_{1-2} \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------}(6.198) \\ \underline{\delta x *_{n-1,B} = d_{n-1,B} * \cos\theta *_{n-1,B}} & \underline{\delta y *_{n-1,B} = d_{n-1,B} * \sin\theta *_{n-1,B}} & \underline{\delta h'_{n-1,B} = d_{n-1,B} * tg\alpha_{n-1,B}} \\ \sum \delta x *_{ij} = \sum d_{ij} * \cos\theta *_{ij} & \sum \delta y *_{ij} = \sum d_{ij} * \sin\theta *_{ij} & \sum \delta h'_{ij} = \sum d_{ij} * tg\alpha_{ij} \end{array}$$

d. Calculul coordonatelor provizorii

$$X_B^* = X_A + \sum \delta x^*_{ij} \neq X_B$$
$$Y_B^* = Y_A + \sum \delta y^*_{ij} \neq Y_B \qquad (6.199)$$

e. Calculul unghiului de rotație ε:

$$\theta_{AB} = \text{arctg}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$
$$\theta_{AB}^* = \text{arctg}\frac{Y_B^* - Y_A}{X_B^* - X_A} \qquad (6.200)$$

$$\varepsilon = \theta_{A-B} - \theta_{A-B}^* \qquad (6.201)$$

f. Calculul orientărilor definitive:

$$\theta_{A-1} = \theta^*_{A-1} + \varepsilon$$
$$\theta_{1-2} = \theta^*_{1-2} + \varepsilon$$
$$\text{----------} \qquad (6.202)$$
$$\theta_{n-1,B} = \theta^*_{n-1,B} + \varepsilon$$

g. Calculul coordonatelor relative şi compensarea lor

g1. Calculul creşterilor de coordonate provizorii

$$\delta x'_{1,2} = d_{1,2}\cos\theta_1 \qquad \delta y'_{1,2} = d_{1,2}\sin\theta_1 \qquad \delta hy_{1,2} = d_{1,2}\,\text{tg}\,\alpha_1$$
$$\delta x'_{2,3} = d_{2,3}\cos\theta_2 \qquad \delta y'_{2,3} = d_{2,3}\sin\theta_2 \qquad \delta hy_{2,3} = d_{2,3}\,\text{tg}\,\alpha_2$$
$$\text{----------} \qquad (6.203)$$
$$\underline{\delta x'_{n-1,n} = d_{n-1,n}\cos\theta_{n-1}} \qquad \underline{\delta y'_{n-1,n} = d_{n-1,n}\sin\theta_{n-1}} \qquad \underline{\delta hy_{n-1,n} = d_{n-1,n}\,\text{tg}\,\alpha_{n-1}}$$
$$\sum \delta x'_{ij} = \sum d_{ij}\cos\theta_i \qquad \sum \delta y'_{ij} = \sum d_{ij}\sin\theta_i \qquad \sum \delta y'_{ij} = \sum d_{ij}\,\text{tg}\,\alpha_i$$

g2. Calculul neînchiderilor pe creşterile de coordonate şi al corecțiilor de închidere pe creşterile de coordonate

$$e_x = v_e - v_j = \sum \delta x'_{ij} - \Delta X_{BC} = \sum \delta x'_{ij} - (X_C - X_B)$$
$$e_y = v_e - v_j = \sum \delta y'_{ij} - \Delta Y_{BC} = \sum \delta y'_{ij} - (Y_C - Y_B) \qquad (6.204)$$
$$e_h = v_e - v_j = \sum \delta h'_{ij} - \Delta H_{BC} = \sum \delta h'_{ij} - (H_C - H_B)$$

Se calculează eroarea totală:

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \tag{6.205}$$

- dacă:

$$\begin{aligned} e &\le T \\ e_h &\le T_h \end{aligned} \tag{6.206}$$

- unde T şi T_h sunt:

$$T = \pm\left(0{,}003\sqrt{\sum D_{ij}} + \frac{\sum D_{ij}}{5000}\right), \text{pentru intravilan si terenuri cu panta} < 5^g;$$

$$T = \pm\left(0{,}0045\sqrt{\sum D_{ij}} + \frac{\sum D_{ij}}{1733}\right), \text{pentru extravilan si terenuri cu panta} > 5^g; \tag{6.207}$$

$$T_h = 0{,}2\sqrt{\sum D_{ij[km]}}.$$

Dacă condiţiile (6.19) sunt îndeplinite se calculează corecţiile c_x, c_y şi c_h:

$$\begin{aligned} c_x &= v_j - v_e = -e_x \\ c_y &= v_j - v_e = -e_y \\ c_h &= v_j - v_e = -e_h \end{aligned} \tag{6.208}$$

g3. Calculul corecţiilor unitare

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{c_x}{\sum D_{ij}}\left[\text{mm}/100\,\text{m}\right] \\ k_y &= \frac{c_y}{\sum D_{ij}}\left[\text{mm}/100\,\text{m}\right] \\ k_h &= \frac{c_h}{\sum D_{ij}}\left[\text{mm}/100\,\text{m}\right] \end{aligned} \tag{6.209}$$

h. Calculul coordonatelor relative compensate

h1. Calculul corecţiilor corespunzătoare creşterilor de coordonate

$$\begin{array}{lll} q_{x_{1,2}} = k_x * d_{1,2} & q_{y_{1,2}} = k_y * d_{1,2} & q_{h_{1,2}} = k_h * d_{1,2} \\ q_{x_{2,3}} = k_x * d_{2,3} & q_{y_{2,3}} = k_y * d_{2,3} & q_{h_{2,3}} = k_h * d_{2,3} \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\ \underline{q_{x_{n-1,n}} = k_x * d_{n-1,n}} & \underline{q_{y_{n-1,n}} = k_y * d_{n-1,n}} & \underline{q_{h_{n-1,n}} = k_h * d_{n-1,n}} \\ \sum q_{x_{ij}} = k_x * \sum d_{ij} = c_x & \sum q_{y_{ij}} = k_y * \sum d_{ij} = c_y & \sum q_{h_{ij}} = k_h * \sum d_{ij} = c_h \end{array} \quad (6.210)$$

h2. Compensarea creşterilor de coordonate

$$\begin{array}{lll} \delta x_{1,2} = \delta x'_{1,2} + q_{x_{1,2}} & \delta y_{1,2} = \delta y'_{1,2} + q_{y_{1,2}} & \delta h_{1,2} = \delta h'_{1,2} + q_{h_{1,2}} \\ \delta x_{2,3} = \delta x'_{2,3} + q_{x_{2,3}} & \delta y_{2,3} = \delta y'_{2,3} + q_{y_{2,3}} & \delta h_{2,3} = \delta h'_{2,3} + q_{h_{2,3}} \\ \text{----------} & \text{----------} & \text{----------} \\ \underline{\delta x_{n-1,n} = \delta x'_{n-1,n} + q_{x_{n-1,n}}} & \underline{\delta y_{n-1,n} = \delta y'_{n-1,n} + q_{y_{n-1,n}}} & \underline{\delta h_{n-1,n} = \delta h'_{n-1,n} + q_{h_{n-1,n}}} \\ \sum \delta x_{ij} = \sum \delta x_i' + c_x = X_C - X_B & \sum \delta y_{ij} = \sum \delta y_i' + c_y = Y_C - Y_B & \sum \delta h_{ij} = \sum \delta h_i' + c_h = H_C - H_B \end{array} \quad (6.211)$$

i. Calculul coordonatelor absolute ale punctelor de drumuire

$$\begin{array}{lll} X_2 = X_1 + \delta x_{1,2} & Y_2 = Y_1 + \delta y_{1,2} & H_2 = H_1 + \delta h_{1,2} \\ X_3 = X_2 + \delta x_{2,3} & Y_3 = Y_2 + \delta y_{2,3} & H_3 = H_2 + \delta h_{2,3} \\ \text{----------} & \text{----------} & \\ X_n = X_{n-1} + \delta x_{n-1,n} = X_B & Y_n = Y_{n-1} + \delta y_{n-1,n} = Y_B & H_n = H_{n-1} + \delta h_{n-1,n} = H_B \end{array} \quad (6.212)$$

6.3.6. Găsirea greşelilor la o drumuire planimetrică

Dacă neînchiderile pe coordonate e_x şi e_y - deci şi eroarea totală $e_T = \pm\sqrt{e_x^2 + e_y^2}$ - nu se înscriu în toleranţele admise, fiind constatate diferenţe mari, rezultă că s-a comis o greşeală la măsurarea unghiurilor sau a laturilor. Identificarea greşelilor se poate face doar dacă un singur unghi sau o singură latură a fost greşită. Dacă s-au comis mai multe erori, drumuirea trebuie refăcută.

6.3.6.1. Identificarea unei greşeli de unghi

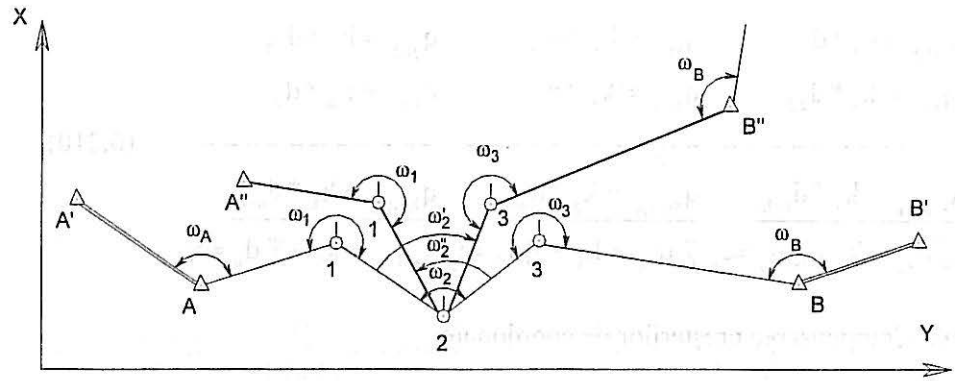


Figura 6.21
Identificarea greşelii de unghi la o drumuire planimetrică

1. Identificarea grafică a greşelii:

a. Se raportează la o anumită scară coordonatele punctelor A, A', B, B'.

b. Se raportează cu raportorul polar unghiurile ω_i şi laturile l_i în direcţia de la A la B, ajungându-se în B'' datorită erorii de unghi din punctul 2.

c. Se raportează în sens invers de la B spre A tot polar, unghiurile ω_i şi laturile l_i, ajungându-se în punctul A''.

La intersecţia celor două trasee obţinute se găseşte greşeala de unghi.

2. Identificarea analitică a greşelii:

a. Se calculează orientările laturilor de drumuire de la A la B.

b. Cu orientările necompensate se calculează coordonatele relative şi absolute ale punctelor de drumuire.

c. Se calculează orientările laturilor pornind de la B spre A.

d. Cu aceste orientări necompensate se calculează din nou creşterile de coordonate şi apoi coordonatele absolute ale punctelor de drumuire.

e. Se compară coordonatele provizorii din cele două drumuiri calculate.

În punctul în care coordonatele sunt foarte apropiate, vom avea eroarea de măsurare a unghiului ce trebuie remăsurat.

6.3.6.2. Identificarea unei greşeli de măsurare a lungimilor

O eroare în măsurarea lungimii laturilor poate fi depistată doar când avem o singură latură greşit măsurată şi se presupune că unghiurile ω_i sunt corect măsurate.

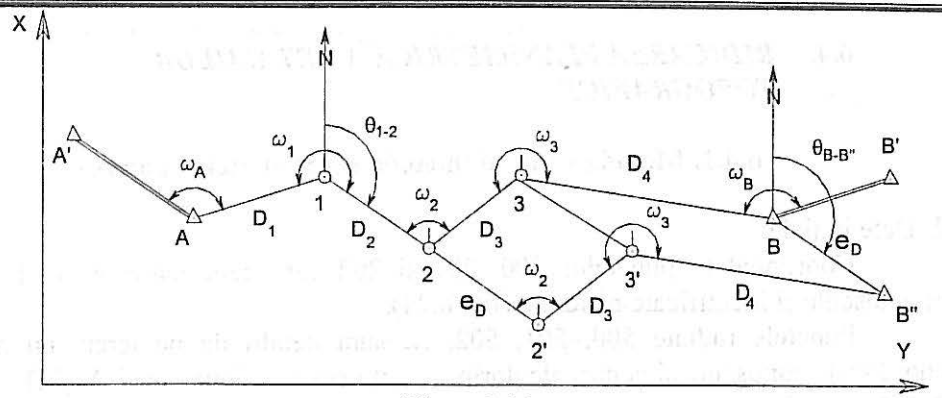


Figura 6.22
Identificarea unei greşeli de măsurare a lungimilor la o drumuire planimetrică

Mod de depistare:

a. Se calculează orientările θ_i şi se compensează.

b. Se calculează cu orientările compensate şi cu distanţele reduse la orizont creşterile de coordonate.

c. Se compară $\sum \delta x'_{ij}, \sum \delta y'_{ij}$ cu $\Delta X_{AB}, \Delta Y_{AB}$, stabilind neînchiderile e_x, e_y, constatând neînchideri mari.

d. Se calculează orientarea $\theta_{B-B''}$:

$$\theta_{B-B''} = \text{arctg}\frac{e_y}{e_x} \qquad (6.213)$$

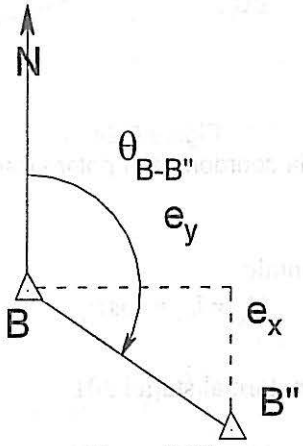


Figura 6.23
Calculul orientării în funcţie de neînchiderile ex, ey

e. Latura de drumuire care are orientarea aproximativ egală cu $\theta_{B-B''}$ este măsurată greşit în teren şi trebuie remăsurată.

6.4. *RIDICAREA PLANIMETRICĂ A DETALIILOR TOPOGRAFICE*

6.4.1. Metoda radierii (metoda coordonatelor polare)

1. Date inițiale:

Coordonatele punctelor 200, 201 și 202 care sunt marcate, au fost recunoscute și identificate pe teren. (fig. 6.24).

Punctele radiate 500, 501, 502, ... sunt detalii de pe teren, nu au coordonate cunoscute și pentru ele dorim să obținem coordonatele X, Y și H

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie ridicată sau medie pentru măsurarea direcțiilor orizontale și verticale. Cu ajutorul acestor direcții se determină unghiurile orizontale ω_i și unghiurile verticale α_i. Se măsoară lungimile înclinate $L_{201\text{-}i}$ către punctele radiate direct cu panglica sau electronic.

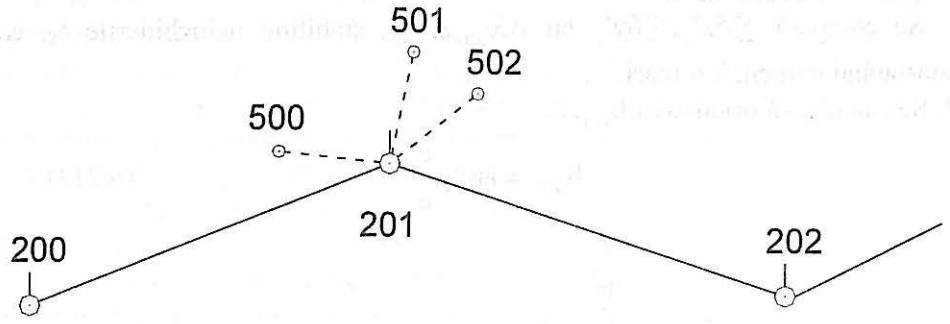


Figura 6.24
Metoda coordonatelor polare (radierii)

3. Etape de calcul:

a. Calculul distanțelor orizontale

$$D_{ij} = L_{ij} * \cos\alpha_{ij} \qquad (6.214)$$

b. Calculul unghiului de orientare al stației 201

$$\alpha'_{201} = \theta_{201-200} - dir_{200}$$
$$\alpha''_{201} = \theta_{201-202} - dir_{202} \qquad (6.215)$$

$$\alpha_{201} = \frac{\alpha'_{2011} + \alpha''_{201}}{2} \qquad (6.216)$$

c. Calculul orientărilor pentru punctele radiate:

$$\theta_{201-i} = \alpha_{201} + dir_i \qquad (6.217)$$

d. Calculul creşterilor de coordonate:

$$\begin{aligned} \delta x_{201-i} &= D_{201-i} * \cos\theta_{201-i} \\ \delta y_{201-i} &= D_{201-i} * \sin\theta_{201-i} \\ \delta h_{201-i} &= D_{201-i} * tg\alpha_{201-i} \end{aligned} \qquad (6.218)$$

e. Calculul coordonatelor absolute:

$$\begin{aligned} X_i &= X_{201} + \delta x_{201-i} \\ Y_i &= Y_{201} + \delta y_{201-i} \\ H_i &= H_{201} + \delta h_{201-i} \end{aligned} \qquad (6.219)$$

6.4.2. Metoda coordonatelor rectangulare (se aplică în terenuri cu panta $\alpha \leq 5^g$)

1. Date iniţiale:

Coordonatele punctelor 200, 201 şi 202 care sunt marcate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. (fig. 6.25).

Punctul radiat P este un detaliu de pe teren, nu are coordonate cunoscute, pentru el dorim să obţinem coordonatele X şi Y.

2. Măsurători:

Sunt folosite panglici sau rulete pentru măsurarea distanţelor d_1 şi d_2.

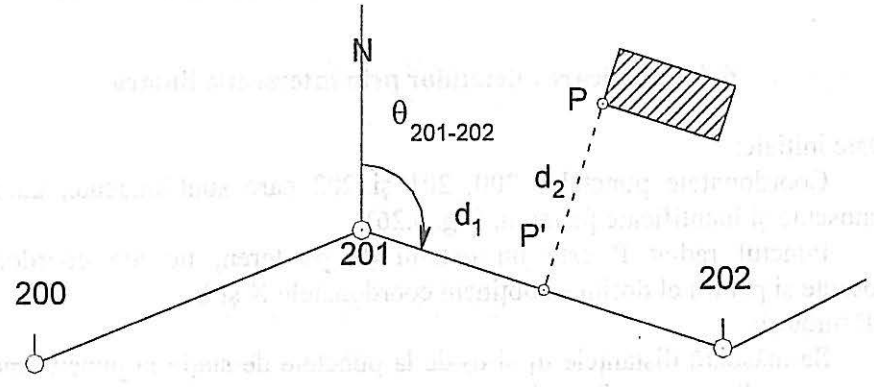


Figura 6.25
Metoda coordonatelor rectangulare

3. Etape de calcul:

1. Se calculează coordonatele punctului P'

Din punctul P se coboară o perpendiculară pe latura de drumuire 201-202, obținându-se punctul P' și se măsoară distanță d_1. Cu ajutorul orientării laturii 201-200 și a distanței măsurate se calculează creșterile de coordonate de la 201 la P' cu relațiile (6.220):

$$\begin{aligned} \delta x_{201-P'} &= d_1 * \cos\theta_{201-202} \\ \delta y_{201-P'} &= d_1 * \sin\theta_{201-202} \end{aligned} \qquad (6.220)$$

$$\begin{aligned} X_{P'} &= X_{201} + \delta x_{201-P'} \\ Y_{P'} &= Y_{201} + \delta y_{201-P'} \end{aligned} \qquad (6.221)$$

2. Calculul coordonatelor punctului P

Se măsoară distanța d_2 de la P' la P și se ține seamă că

$$\theta_{P-P'} = \theta_{201-202} - 100^G \qquad (6.222)$$

rezultă creșterile de coordonate de la P' la P

$$\begin{aligned} \delta x_{P'-P} &= d_2 * \cos\theta_{P'-P} \\ \delta y_{P'-P} &= d_2 * \sin\theta_{P'-P} \end{aligned} \qquad (6.223)$$

$$\begin{aligned} X_P &= X_{P'} + \delta x_{P'-P} \\ Y_P &= Y_{P'} + \delta y_{P'-P} \end{aligned} \qquad (6.224)$$

6.4.3. Ridicarea detaliilor prin intersecție liniară

1. Date inițiale:

Coordonatele punctelor 200, 201 și 202 care sunt marcate, au fost recunoscute și identificate pe teren. (fig. 6.26).

Punctul radiat P este un detaliu de pe teren, nu are coordonate cunoscute și pentru el dorim să obținem coordonatele X și Y.

2. Măsurători:

Se măsoară distanțele d_1 și d_2 de la punctele de stație la punctul radiat direct cu panglica sau stadimetric.

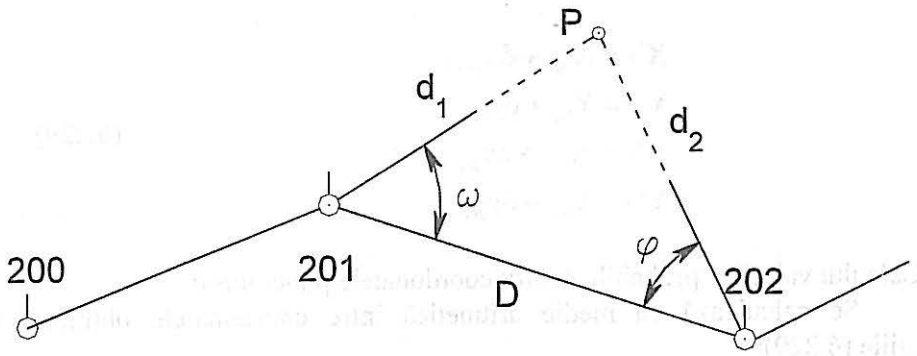


Figura 6.26
Metoda intersecției liniare

3. Etape de calcul:

a. Calculul unghiurilor orizontale ω și φ

se scrie teorema cosinusurilor în triunghiul 201-202-P

$$d_2^2 = d_1^2 + D^2 - 2 * d_1 * D * \cos\omega$$
$$d_1^2 = d_2^2 + D^2 - 2 * d_2 * D * \cos\varphi \qquad (6.225)$$

$$\omega = \arccos\frac{d_1^2 + D^2 - d_2^2}{2 * d_1 * D}$$
$$\varphi = \arccos\frac{d_2^2 + D^2 - d_1^2}{2 * d_2 * D} \qquad (6.226)$$

b. Calculul orientărilor laturilor 201-P și 202-P

$$\theta_{201-P} = \theta_{201-202} - \omega$$
$$\theta_{202-P} = \theta_{202-201} + \varphi \qquad (6.227)$$

c. Calculul creșterilor de coordonate:

$$\delta x^1_{201-P} = D_{201-P} * \cos\theta_{201-P}$$
$$\delta y^1_{201-P} = D_{201-P} * \sin\theta_{201-P}$$
$$\delta x^2_{202-P} = D_{202-P} * \cos\theta_{202-P} \qquad (6.228)$$
$$\delta y^2_{202-P} = D_{202-P} * \sin\theta_{202-P}$$

d. Calculul coordonatelor absolute:

$$\begin{aligned} X^1_P &= X_{201} + \delta x_{201-P} \\ Y^1_P &= Y_{201} + \delta y_{201-P} \\ X^2_P &= X_{202} + \delta x_{202-P} \\ Y^2_P &= Y_{202} + \delta y_{202-P} \end{aligned} \qquad (6.229)$$

e. Calculul valorilor probabile pentru coordonatele punctului P

Se calculează ca medie aritmetică între coordonatele obținute cu relațiile (6.229):

$$\begin{aligned} X_P &= \frac{X^1_P + X^2_P}{2} \\ Y_P &= \frac{Y^1_P + Y^2_P}{2} \end{aligned} \qquad (6.230)$$

6.4.4. Ridicarea detaliilor prin intersecție unghiulară

1. Date inițiale:

Coordonatele punctelor 200, 201 şi 202 care sunt marcate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. (fig. 6.27).

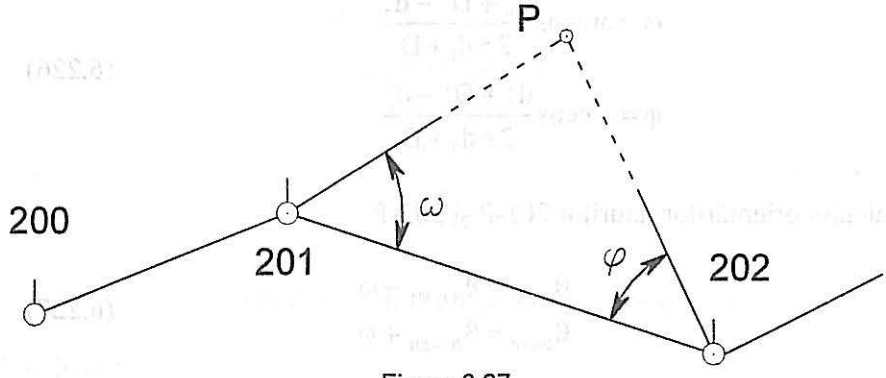


Figura 6.27
Metoda intersecției unghiulare

Punctul radiat P este un detaliu de pe teren, nu are coordonate cunoscute şi pentru el dorim să obținem coordonatele X şi Y.

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de precizie ridicată sau medie pentru măsurarea direcțiilor orizontale. Cu ajutorul acestor direcții se determină unghiurile orizontale ω_i şi φ_i.

3. Etape de calcul:

a. Calculul orientărilor laturilor 201-P şi 202-P:

$$\theta_{201-P} = \theta_{201-202} - \omega$$
$$\theta_{202-P} = \theta_{202-201} + \varphi \qquad (6.231)$$

b. Calculul coordonatelor punctului P:

Se folosesc formulele de la intersecţie înainte procedeul analitic

$$X_P = \frac{Y_{202} - Y_{201} + X_{201} * tg\theta_{201-P} - X_{202} * tg\theta_{202-P}}{tg\theta_{201-P} - tg\theta_{202-P}}$$
$$Y^1{}_P = Y_{201} + tg\theta_{201-P} * (X_P - X_{201}) \qquad (6.232)$$
$$Y^2{}_P = Y_{202} + tg\theta_{202-P} * (X_P - X_{202})$$

6.5. *REŢELE DE RIDICARE ALTIMETRICĂ*

6.5.1. Drumuirea de nivelment geometric sprijinită la capete

1. Date iniţiale:

Se cunosc cotele punctelor A şi B, punctele sunt marcate, au fost recunoscute şi identificate pe teren. (fig. 6.28).

Punctele 1, 2, ... n-1 sunt marcate, nu au cote cunoscute şi pentru ele dorim să obţinem cota H.

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de nivelment de precizie pentru efectuarea citirilor a_i şi b_i pe mire.

Se staţionează cu instrumentul de nivelment, pe cât posibil, la mijlocul distanţei dintre punctele drumuirii de nivelment geometric, adică porteele să fie aproximativ egale.

3. Etape de calcul:

a. Calculul diferenţelor de nivel provizorii şi compensarea lor

a1. Calculul diferenţelor de nivel provizorii

$$\delta'_{h_{A-1}} = a_1 - b_1$$
$$\delta'_{h_{1-2}} = a_2 - b_2 \qquad (6.233)$$
$$- - - - - - - -$$
$$\delta'_{h_{n-1,B}} = a_n - b_n$$

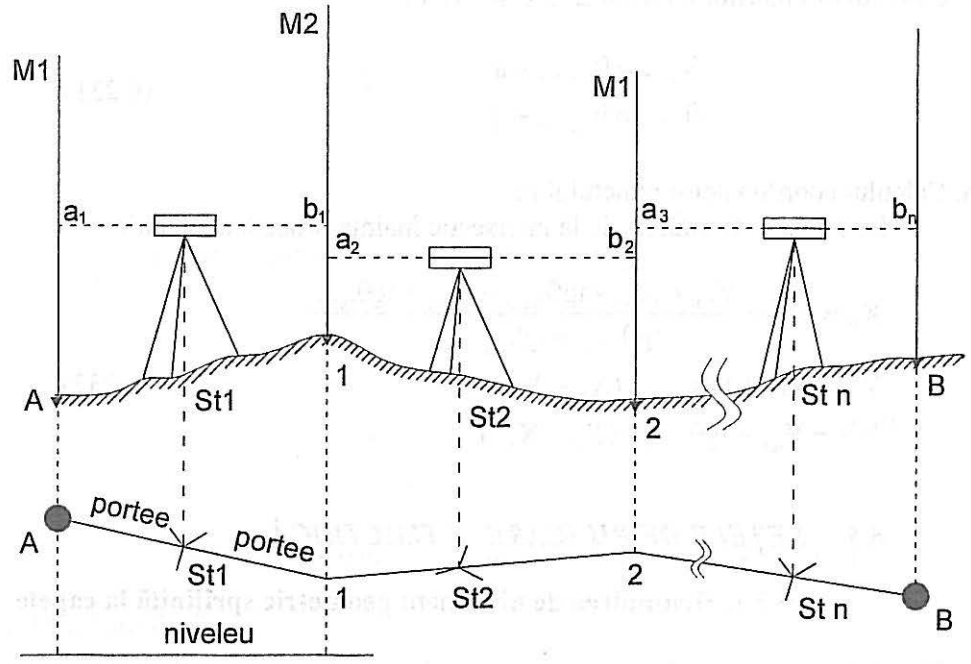


Figura 6.28
Drumuirea de nivelment geometric sprijinită la capete

a2. Efectuarea controlului foii de nivelment

Se verifică fiecare pagină a carnetului de nivelment cu relația (6.234).

$$\sum \delta h_{ij} = \sum a_i - \sum b_i \qquad (6.234)$$

Acest control se trece în josul fiecărei foi a carnetului de nivelment.

a3. Calculul erorii şi corecției de neînchidere pe diferențele de nivel:

$$e_h = v_e - v_j = \sum \delta h'_{ij} - (H_B - H_A) \qquad (6.235)$$

- dacă:

$$e_h \le T_h \qquad (6.236)$$

- unde:

$$T_h = 3 * \sigma_i \sqrt{\sum D_{i\,[km]}} \qquad (6.237)$$

În relația (6.237) σ_i reprezintă abaterea standard pe un kilometru dublu de nivelment care depinde de aparat şi are valori 3-7 mm, iar dacă condiția

(6.236) este îndeplinită se calculează corecţia:

$$c_h = v_j - v_e = -e_h \tag{6.238}$$

a4. Calculul corecţiei unitare

$$k_h = \frac{c_h}{\sum D_i}\left[\frac{mm}{100m}\right]$$
$$k_h^0 = \frac{c_h}{\sum|\delta h'_{ij}|}\left[\frac{mm}{100m}\right] \tag{6.239}$$

a5. Compensarea diferenţelor de nivel provizorii proporţional cu distanţa D_i

$$\begin{aligned}
&\delta h_{A-1} = \delta h'_{A-1} + k_h * d_{A-1}\\
&\delta h_{1-2} = \delta h'_{1-2} + k_h * d_{1-2}\\
&----------\\
&\delta h_{n-1,B} = \delta h'_{n-1,B} + k_h * d_{n-1,B}\\
&\sum \delta h_{ij} = H_B - H_A \text{ (Control)}
\end{aligned} \tag{6.240}$$

a6. Compensarea diferenţelor de nivel provizorii proporţional cu creşterile de altitudini

$$\begin{aligned}
&\delta h_{A-1} = \delta h'_{A-1} + k_h^0 * |\delta h'_{A-1}|\\
&\delta h_{1-2} = \delta h'_{1-2} + k_h^0 * |\delta h'_{1-2}|\\
&----------\\
&\delta h_{n-1,B} = \delta h'_{n-1,B} + k_h^0 * |\delta h'_{n-1,B}|\\
&\sum \delta h_{ij} = H_B - H_A \text{ (Control)}
\end{aligned} \tag{6.241}$$

b. Calculul cotelor punctelor drumuirii

$$\begin{aligned}
&H_1 = H_A + \delta h_{A-1}\\
&H_2 = H_1 + \delta h_{1-2}\\
&----------\\
&H_B = H_{n-1} + \delta h_{n-1,B} \text{(Control)}
\end{aligned} \tag{6.242}$$

6.5.1.1. Exemplu. Drumuirea de nivelment geometric sprijinită la capete

1. Date inițiale:

Inventar cu cotele reperilor de nivelment

Tabelul 6-13

Nr. pct.	H [m]
RN1	232.127
RN2	232.427

2. Măsurători:

a. citirile a_i și b_i pe mire coloanele 3, 4 și 5 din tabelul (6.14)

3. Schița drumuirii:

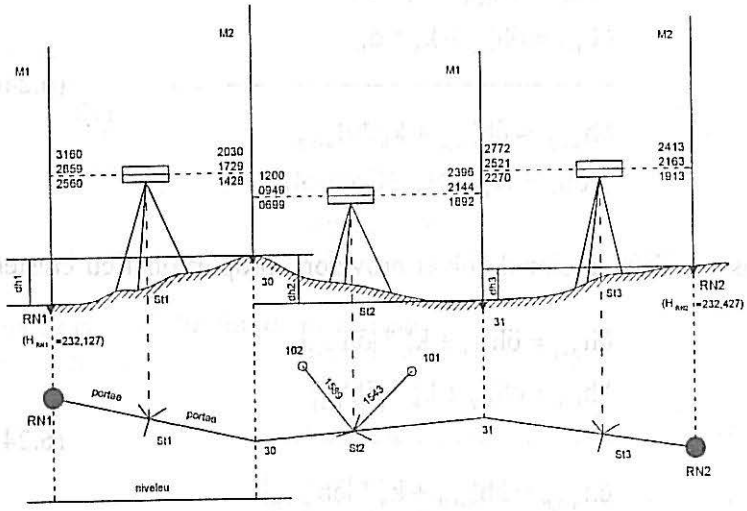


Figura 6.29

Exemplu de drumuire de nivelment geometric sprijinită la capete

4. Etape de calcul:

a. Calculul diferențelor de nivel provizorii și compensarea lor

a1. Calculul diferențelor de nivel provizorii

$$\begin{aligned} \delta'_{h_1} &= a_1 - b_1 = 1.130 \\ \delta'_{h_2} &= a_2 - b_2 = -1.195 \\ \delta'_{h_3} &= a_3 - b_3 = 0.358 \end{aligned} \qquad (6.243)$$

se trec în coloanele 8 sau 9 din tabelul (6.14) în funcție de semn

a2. Efectuarea controlului foii de nivelment

$$\sum a_i - \sum b_i = \sum \delta h_i'$$
$$6.329 - 6.036 = 1.130 - 1.195 + 0.358 \qquad (6.244)$$
$$0.293 = 0.293$$

acest control se trece în josul fiecărei foi de nivelment

a3. Calculul erorii şi corecţiei de neînchidere pe diferenţele de nivel

$$e_h = v_e - v_j = \sum \delta h_{ij}' - (H_{RN2} - H_{RN1}) = \qquad (6.245)$$
$$= 0.293 - (232.427 - 232.127) = -0.007\text{m}$$

se verifică dacă:

$$e_h \le T_h \qquad (6.246)$$

unde:

$$T_h = 3 * \sigma_i \sqrt{\sum D_{i\,[km]}} = 3 * 5 * \sqrt{0.3211} = \pm 0.0085\text{m} \qquad (6.247)$$
$$c_h = v_j - v_e = -e_h = 0.007\text{m} \qquad (6.248)$$

a4. Calculul corecţiei unitare

$$k_h = \frac{c_h}{\sum D_i} = \frac{7}{3.211} = 2.180 \frac{\text{mm}}{100\text{m}} \qquad (6.249)$$

a5. Compensarea diferenţelor de nivel provizorii proporţional cu distanţa D_i

$$\delta h_1 = \delta h_1' + k_h * d_1 = 1.130 + 2.180 * 1.202 = 1.133\text{m}$$
$$\delta h_2 = \delta h_2' + k_h * d_2 = -1.195 + 2.180 * 1.005 = -1.193\text{m} \qquad (6.250)$$
$$\delta h_3 = \delta h_3' + k_h * d_3 = 0.358 + 2.180 * 1.002 = 0.360\text{m}$$

b. Calculul cotelor punctelor drumuirii

$$H_{30} = H_{RN1} + \delta h_1 = 232.127 + 1.133 = 233.260\text{m}$$
$$H_{31} = H_{30} + \delta h_2 = 233.260 + (-1.193) = 232.067\text{m} \qquad (6.251)$$
$$H_{RN2} = H_{31} + \delta h_3 = 232.067 + 0.360 = 232.427\text{m}$$

c. Calculul cotelor punctelor radiate 101 şi 102

c1. calculului altitudinii planului de vizare în staţia 2

$$H'_{V_{S2}} = H_{30} + a_2 = 233.260 + 0.949 = 234.209\text{m}$$
$$H''_{V_{S2}} = H_{31} + b_2 = 232.067 + 2.144 = 234.211\text{m} \qquad (6.252)$$

$$H_{V_{S2}} = \frac{H'_{V_{S2}} + H''_{V_{S2}}}{2} = \frac{234.209 + 234.211}{2} = 234.210\text{m} \qquad (6.253)$$

c2. Calculul cotelor punctelor radiate

$$H_{101} = H_{V_{S2}} - c_{101} = 234.210 - 1.543 = 232.667\text{m}$$
$$H_{102} = H_{V_{S2}} - c_{102} = 234.210 - 1.589 = 232.621\text{m} \qquad (6.254)$$

Carnet de nivelment

Tabelul 6-14

Nr.staţiei	Pct.vizat	CITIRI PE MIRA					Diferenţe de nivel		Altitudinea planului de vizare	Altitudini absolute	Observaţii
		Inregistrate			Medii						
		Inapoi	Inter-mediare	Inainte	Inapoi	Inainte	+	-			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_1	RN_1	3160			2859		1130 +3 1133			**232.127**	d_1= =120.2m
		2859									
		2560									
	30			2030		1729					
				1729							
				1428							
S_2	30	1200			0949			1195 +2 1193	H_V= =234.208	**233.260**	d_2= =100.5m
		0949									
		0699									
	31			2396		2144					
				2144							
				1892							
	101		1543							*232.667*	
	102		1589							*232.621*	
S_3	31	2772			2521		358 +2 360			**232.067**	d_3= =100.4m
		2521									
		2270									
	RN_2			2413		2163				**232.427**	
				2163							
				1913							
		$\Sigma a = 6329$			$\Sigma b = 6036$						
		$e_h = -7$ mm			$T_h = \pm 8.5$ mm						
		$c_h = +7$ mm			$q_h = 2.181365$						

6.5.2. Drumuirea de nivelment geometric cu punct nodal

1. Date inițiale:

Se cunosc cotele punctelor A, B și C, punctele sunt marcate, au fost recunoscute și identificate pe teren. (fig. 6.30).

Punctele 1, 2, ... n-1 pe cele trei drumuiri și punctul nodal N sunt marcate, nu au cote cunoscute și pentru ele dorim să obținem cotele H_i.

2. Măsurători:

Sunt folosite instrumente de nivelment de precizie pentru efectuarea citirilor a_i și b_i pe mire. Se staționează cu instrumentul de nivelment, pe cât posibil, la mijlocul distanței dintre punctele drumuirii de nivelment geometric, adică porteele să fie aproximativ egale.

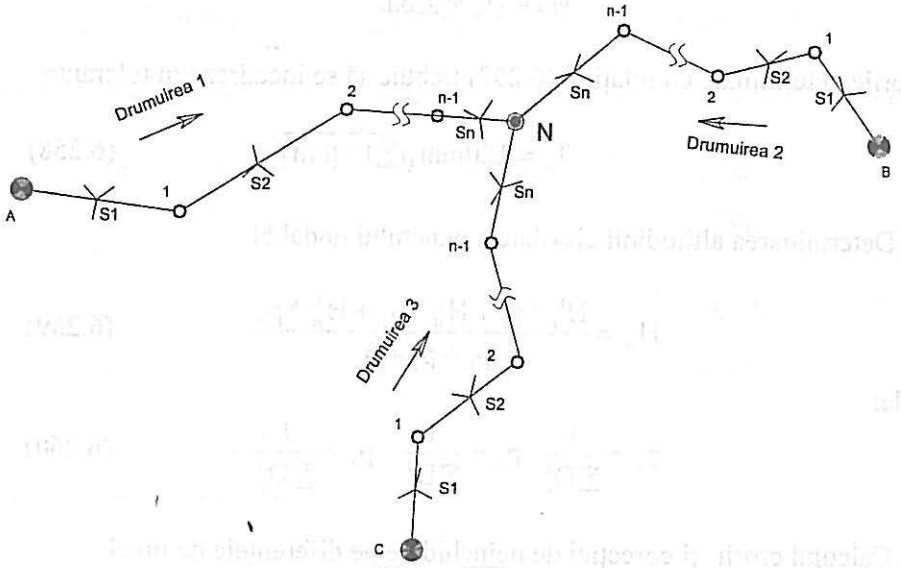


Figura 6.30
Drumuirea de nivelment geometric cu punct nodal

3. Etape de calcul:

a. Calculul diferențelor de nivel provizorii și compensarea lor

a1. Calculul diferențelor de nivel provizorii

$$\begin{array}{lll} \delta h^{[1]}_{A-1} = a_1 - b_1 & \delta h^{[2]}_{B-1} = a_1 - b_1 & \delta h^{[3]}_{C-1} = a_1 - b_1 \\ \delta h^{[1]}_{1-2} = a_2 - b_2 & \delta h^{[2]}_{1-2} = a_2 - b_2 & \delta h^{[3]}_{1-2} = a_2 - b_2 \\ \text{--------} & \text{--------} & \text{--------} \\ \delta h^{[1]}_{n-1-N} = a_n - b_n & \delta h^{[2]}_{n-1-N} = a_n - b_n & \delta h^{[3]}_{n-1-N} = a_n - b_n \end{array} \qquad (6.255)$$

a2. Efectuarea controlului foii de nivelment

Se verifică fiecare pagină a carnetului de nivelment cu relația (6.256)

$$\begin{aligned}\sum \delta h_{ij}^{[1]} &= \sum a_i - \sum b_i \\ \sum \delta h_{ij}^{[2]} &= \sum a_i - \sum b_i \\ \sum \delta h_{ij}^{[3]} &= \sum a_i - \sum b_i\end{aligned} \qquad (6.256)$$

a3. Determinarea altitudinii provizorii a punctului nodal N

$$\begin{aligned}H_N^1 &= H_A + \sum \delta h_{ij}^{[1]} \\ H_N^2 &= H_B + \sum \delta h_{ij}^{[2]} \\ H_N^3 &= H_C + \sum \delta h_{ij}^{[3]}\end{aligned} \qquad (6.257)$$

valorile determinate cu relațiile (6.257) trebuie să se încadreze în toleranțe

$$T_h = \pm 20\text{mm}\sqrt{\sum D_{ij}[\text{km}]} \qquad (6.258)$$

a4. Determinarea altitudinii absolute a punctului nodal N

$$H_N = \frac{H_N^1 * p_1 + H_N^2 * p_2 + H_N^3 * p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \qquad (6.259)$$

unde:

$$p_1 = \frac{1}{\sum D_i^1} \quad p_2 = \frac{1}{\sum D_i^2} \quad p_3 = \frac{1}{\sum D_i^3} \qquad (6.260)$$

a5. Calculul erorii şi corecției de neînchidere pe diferențele de nivel

$$\begin{aligned}e_h^1 &= v_e - v_j = H_N^1 - H_N \\ e_h^2 &= v_e - v_j = H_N^2 - H_N \\ e_h^3 &= v_e - v_j = H_N^3 - H_N\end{aligned} \qquad (6.261)$$

dacă:

$$e_h \le T_h \qquad (6.262)$$

unde:

$$T_h = 3 * \sigma_i \sqrt{\sum D_{i\,[\text{km}]}} \qquad (6.263)$$

în relația (6.263) σ_i reprezintă abaterea standard pe un kilometru de dublu nivelment care depinde de aparat și are valori de 3-7 mm, dacă condiția (6.262) este îndeplinită se calculează corecția:

$$\begin{aligned} c_h^1 &= v_j - v_e = -e_h^1 \\ c_h^2 &= v_j - v_e = -e_h^2 \\ c_h^3 &= v_j - v_e = -e_h^3 \end{aligned} \qquad (6.264)$$

a6. Calculul corecției unitare

$$k_h^1 = \frac{c_h^1}{\sum D_i^1}\left[\frac{mm}{100\,m}\right] \quad k_h^2 = \frac{c_h^2}{\sum D_i^2 3}\left[\frac{mm}{100\,m}\right] \quad k_h^3 = \frac{c_h^1}{\sum D_i^3}\left[\frac{mm}{100\,m}\right] \qquad (6.265)$$

a7. Compensarea diferențelor de nivel provizorii proporțional cu distanța D_i

$$\begin{aligned} \delta h^1_{A-1} &= \delta h'^{[1]}_{A-1} + k_h^1 * d_{A-1} & \delta h^2_{B-1} &= \delta h'^{[2]}_{B-1} + k_h^2 * d_{B-1} \\ \delta h^1_{1-2} &= \delta h'^{[1]}_{1-2} + k_h^1 * d_{1-2} & \delta h^2_{1-2} &= \delta h'^{[2]}_{1-2} + k_h^2 * d_{1-2} \\ &\text{----------} & &\text{----------} \\ \delta h^1_{n-1,N} &= \delta h'^{[1]}_{n-1,N} + k_h^1 * d_{n-1,N} & \delta h^2_{n-1,N} &= \delta h'^{[2]}_{n-1,N} + k_h^2 * d_{n-1,N} \\ \sum \delta h^1_{ij} &= H_N - H_A\,(control) & \sum \delta h^1_{ij} &= H_N - H_B\,(control) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta h^3_{C-1} &= \delta h'^{[3]}_{C-1} + k_h^3 * d_{C-1} \\ \delta h^3_{1-2} &= \delta h'^{[3]}_{1-2} + k_h^3 * d_{1-2} \\ &\text{----------} \\ \delta h^3_{n-1,N} &= \delta h'^{[3]}_{n-1,N} + k_h^3 * d_{n-1,N} \\ \sum \delta h^1_{ij} &= H_N - H_C\,(control) \end{aligned} \qquad (6.266)$$

b. Calculul cotelor punctelor drumuirii

$$\begin{aligned} H^1_1 &= H_A + \delta h^1_{A-1} & H^2_1 &= H_B + \delta h^2_{B-1} & H^3_1 &= H_C + \delta h^3_{C-1} \\ H^1_2 &= H^1_1 + \delta h^1_{1-2} & H^2_2 &= H^2_1 + \delta h^2_{1-2} & H^3_2 &= H^3_1 + \delta h^3_{1-2} \\ &\text{----------} & &\text{----------} & &\text{----------} \\ H_N &= H^1_{n-1} + \delta h^1_{n-1,N} & H_N &= H^2_{n-1} + \delta h^2_{n-1,N} & H_N &= H^3_{n-1} + \delta h^3_{n-1,N} \end{aligned} \qquad (6.267)$$

6.5.2.1. Exemplu. Drumuirea de nivelment geometric cu punct nodal

1. Date inițiale:

Inventar cu cotele reperilor de nivelment

Tabelul 6-15

Nr. pct.	H [m]
RN1	232.127
RN2	233.823
RN3	232.848

2. Măsurători:

a. citirilor a_i și b_i pe mire coloanele 3, 4 și 5 din tabelele (6.16), (6.17) și (6.18)

3. Schița drumuirilor:

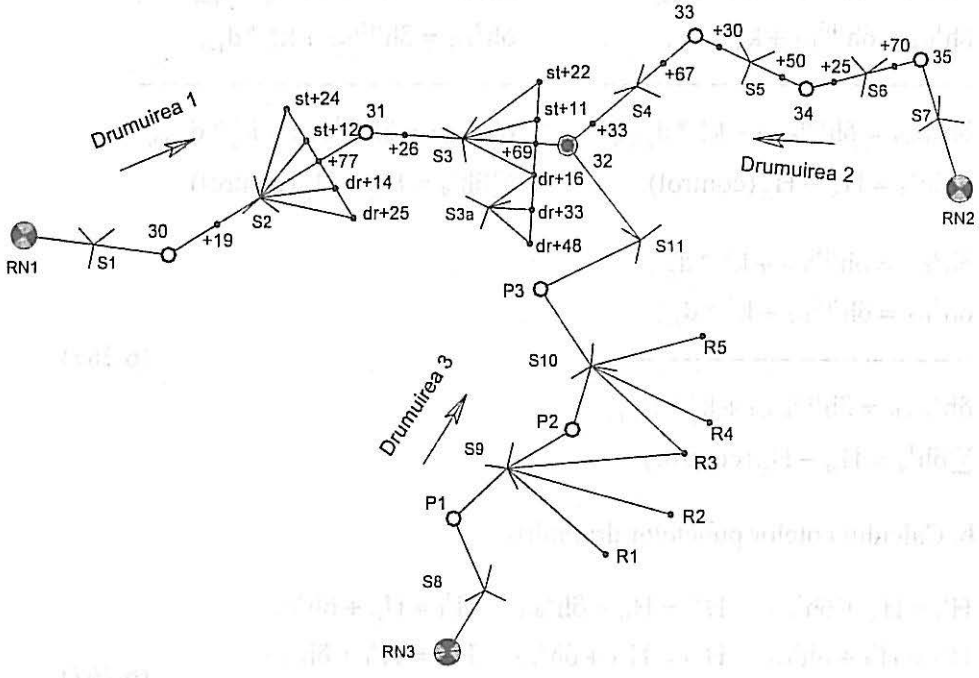


Figura 6.31
Drumuirea de nivelment geometric cu punct nodal

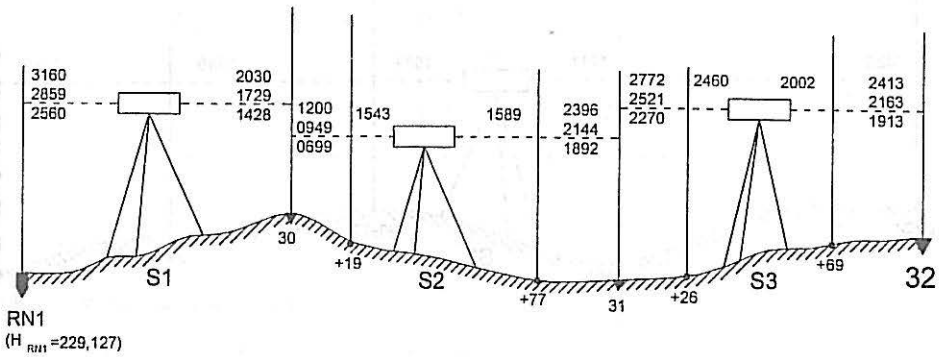


Figura 6.32
Schița drumuirii 1

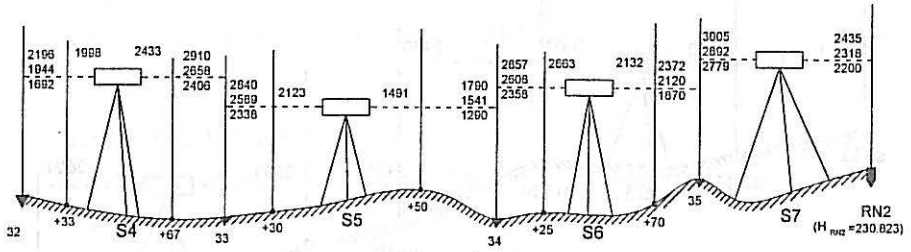


Figura 6.33
Schița drumuirii 2

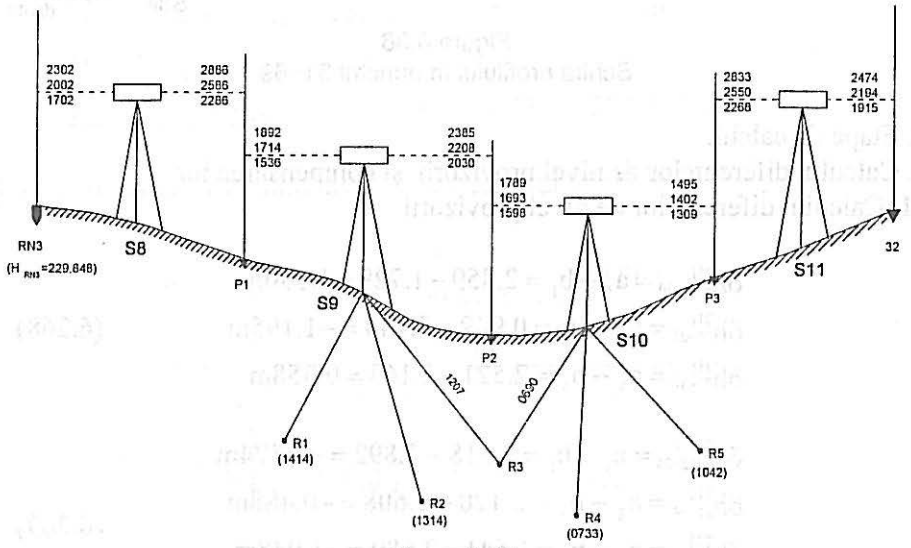


Figura 6.34
Schița drumuirii 3

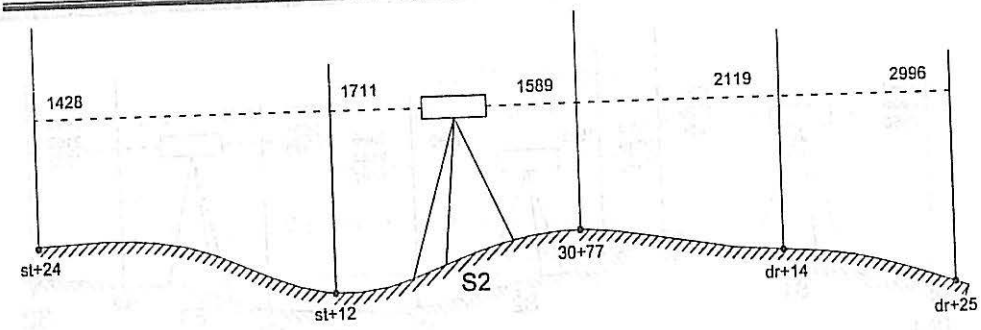


Figura 6.35
Schița profilului în punctul 30+77

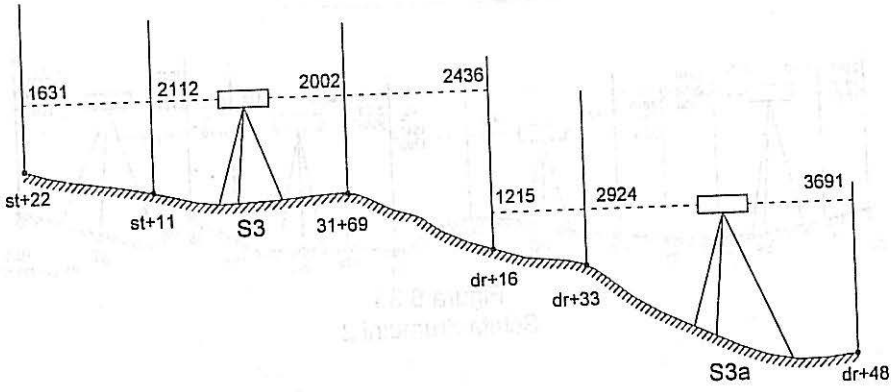


Figura 6.36
Schița profilului în punctul 31+69

4. Etape de calcul:

a. Calculul diferențelor de nivel provizorii și compensarea lor

a1. Calculul diferențelor de nivel provizorii

$$\begin{aligned}
\delta h^{[1]}_{RN1-30} &= a_1 - b_1 = 2.859 - 1.729 = 1.130\text{m} \\
\delta h^{[1]}_{30-31} &= a_2 - b_2 = 0.949 - 2.144 = -1.195\text{m} \\
\delta h^{[1]}_{31-32} &= a_3 - b_3 = 2.521 - 2.163 = 0.358\text{m}
\end{aligned} \tag{6.268}$$

$$\begin{aligned}
\delta h^{[2]}_{RN2-35} &= a_1 - b_1 = 2.318 - 2.892 = -0.574\text{m} \\
\delta h^{[2]}_{35-34} &= a_2 - b_2 = 2.120 - 2.608 = -0.488\text{m} \\
\delta h^{[2]}_{34-33} &= a_3 - b_3 = 1.541 - 2.589 = -1.048\text{m} \\
\delta h^{[2]}_{33-32} &= a_4 - b_4 = 2.658 - 1.944 = 0.714\text{m}
\end{aligned} \tag{6.269}$$

$$\begin{aligned}
&\delta h^{[3]}_{RN3-P1} = a_1 - b_1 = 2.002 - 2.586 = -0.584m \\
&\delta h^{[3]}_{P1-P2} = a_2 - b_2 = 1.714 - 2.208 = -0.494m \\
&\delta h^{[3]}_{P2-P3} = a_3 - b_3 = 1.693 - 1.402 = 0.291m \\
&\delta h^{[3]}_{P2-32} = a_4 - b_4 = 2.550 - 2.194 = 0.356m
\end{aligned} \qquad (6.270)$$

a2. Efectuarea controlului foii de nivelment

$$\begin{aligned}
&\sum \delta h^{[1]}_{ij} = \sum a_i - \sum b_i \\
&1.130 + (-1.195) + 0.385 = 6.329 - 6.036 \\
&0.293 = 0.293 \\
&\sum \delta h^{[2]}_{ij} = \sum a_i - \sum b_i \\
&-0.574 + (-0.488) + (-1.048) + 0.714 = 8.637 - 10.033 \\
&-1.396 = -1.396 \\
&\sum \delta h^{[3]}_{ij} = \sum a_i - \sum b_i \\
&-0.584 + (-0.494) + 0.291 + 0.356 = 7.959 - 8.390 \\
&-0.431 = -0.431
\end{aligned} \qquad (6.271)$$

a3. Determinarea altitudinilor provizorii a punctului nodal 32

$$\begin{aligned}
&H^1_{32} = H_{RN1} + \sum \delta h^{[1]}_{ij} = 232.127 + 0.293 = 232.420m \\
&H^2_{32} = H_{RN2} + \sum \delta h^{[2]}_{ij} = 233.823 + (-1.396) = 232.427m \\
&H^3_{32} = H_{RN3} + \sum \delta h^{[3]}_{ij} = 232.848 + (-0.431) = 232.417m
\end{aligned} \qquad (6.272)$$

a4. Determinarea altitudinii absolute a punctului nodal N

$$\begin{aligned}
&p_1 = \frac{1}{\sum D^1_i} = \frac{1}{120.2 + 100.5 + 100.4} = 0.0031 \\
&p_2 = \frac{1}{\sum D^2_i} = \frac{1}{46.1 + 100.1 + 100.2 + 80.8} = 0.0031 \\
&p_3 = \frac{1}{\sum D^3_i} = \frac{1}{120.0 + 71.1 + 37.7 + 112.4} = 0.0029
\end{aligned} \qquad (6.273)$$

$$H_N = \frac{H_N^1 * p_1 + H_N^2 * p_2 + H_N^3 * p_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \\ = \frac{232.420 * 0.0031 + 232.427 * 0.0031 + 232.417 * 0.0029}{0.0031 + 0.0031 + 0.0029} = 232.422\text{m} \quad (6.274)$$

a5. Calculul erorii şi corecţiei de neînchidere pe diferenţele de nivel

$$e_h^1 = v_e - v_j = H_N^1 - H_N = 232.420 - 232.422 = -0.002\text{m}$$
$$e_h^2 = v_e - v_j = H_N^2 - H_N = 232.427 - 232.422 = 0.005\text{m} \quad (6.275)$$
$$e_h^3 = v_e - v_j = H_N^3 - H_N = 232.417 - 232.422 = -0.005\text{m}$$

se verifică dacă:

$$e_h \le T_h \quad (6.276)$$

unde:

$$T^1{}_h = 3 * \sigma_i \sqrt{\sum D_{i\,[km]}} = 3 * 5 * \sqrt{0.3209} = \pm 0.0085\text{m}$$
$$T^2{}_h = 3 * \sigma_i \sqrt{\sum D_{i\,[km]}} = 3 * 5 * \sqrt{0.3272} = \pm 0.0086\text{m} \quad (6.277)$$
$$T^3{}_h = 3 * \sigma_i \sqrt{\sum D_{i\,[km]}} = 3 * 5 * \sqrt{0.3209} = \pm 0.0088\text{m}$$

se calculează corecţiile:

$$c_h^1 = v_j - v_e = -e_h^1 = 0.002\text{m}$$
$$c_h^2 = v_j - v_e = -e_h^2 = -0.005\text{m} \quad (6.278)$$
$$c_h^3 = v_j - v_e = -e_h^3 = 0.005\text{m}$$

a6. Calculul corecţiei unitare

$$k_h^1 = \frac{c_h^1}{\sum D_i{}^1}\left[\frac{\text{mm}}{100\,\text{m}}\right] = \frac{2}{3.211} = 0.623\left[\frac{\text{mm}}{100\,\text{m}}\right]$$
$$k_h^2 = \frac{c_h^2}{\sum D_i{}^2 3}\left[\frac{\text{mm}}{100\,\text{m}}\right] = \frac{-5}{3.272} = -1.528\left[\frac{\text{mm}}{100\,\text{m}}\right] \quad (6.279)$$
$$k_h^3 = \frac{c_h^1}{\sum D_i{}^3}\left[\frac{\text{mm}}{100\,\text{m}}\right] = \frac{5}{3.412} = 1.465\left[\frac{\text{mm}}{100\,\text{m}}\right]$$

a7. Compensarea diferențelor de nivel provizorii proporțional cu distanța D_i

$$\delta h^1_{RN1-30} = \delta h'^{[1]}_{RN1-30} + k_h^1 * d_{RN1-30} = 1.130 + 0.623 * 120.2 = 1.131m$$
$$\delta h^1_{30-31} = \delta h'^{[1]}_{30-31} + k_h^1 * d_{30-31} = -1.195 + 0.623 * 100.5 = 1.194m$$
$$\delta h^1_{31-32} = \delta h'^{[1]}_{31-32} + k_h^1 * d_{31-32} = 0.358 + 0.623 * 100.4 = 0.358m$$

$$\delta h^2_{RN2-35} = \delta h'^{[2]}_{RN2-35} + k_h^2 * d_{RN2-35} = -0.574 + (-1.528) * 0.461 = -0.574m$$
$$\delta h^2_{35-34} = \delta h'^{[2]}_{35-34} + k_h^2 * d_{35-34} = -0.488 + (-1.528) * 1.001 = -0.489m$$
$$\delta h^2_{34-33} = \delta h'^{[2]}_{34-33} + k_h^2 * d_{34-33} = -1.048 + (-1.528) * 1.002 = -1.050m \quad (6.280)$$
$$\delta h^2_{33-32} = \delta h'^{[2]}_{33-32} + k_h^2 * d_{33-32} = -0.714 + (-1.528) * 0.808 = -0.712$$

$$\delta h^3_{RN3-P1} = \delta h'^{[3]}_{RN3-P1} + k_h^3 * d_{RN3-P1} = -0.587 + 1.465 * 1.200 = -0.583m$$
$$\delta h^3_{P1-P2} = \delta h'^{[3]}_{P1-P2} + k_h^3 * d_{P1-P2} = -0.494 + 1.465 * 0.711 = -0.493m$$
$$\delta h^3_{P2-P3} = \delta h'^{[3]}_{P2-P3} + k_h^3 * d_{P2-P3} = 0.291 + 1.465 * 0.377 = 0.292m$$
$$\delta h^3_{P3-32} = \delta h'^{[3]}_{P3-32} + k_h^3 * d_{P3-32} = 0.356 + 1.465 * 1.124 = 0.358m$$

b. Calculul cotelor punctelor drumuirii

$$H^1_{30} = H_{RN1} + \delta h^1_{RN1-30} = 232.127 + 1.1131 = 233.258m$$
$$H^1_{31} = H^1_{30} + \delta h^1_{30-31} = 233.258 + (-1.194) = 232.064m$$
$$H^1_{32} = H^1_{31} + \delta h^1_{31-32} = 232.064 + 0.358 = 232.422m$$

$$H^2_{35} = H_{RN2} + \delta h^2_{RN2-35} = 233.823 + (-0.574) = 233.249m$$
$$H^2_{34} = H_{35} + \delta h^2_{35-34} = 233.249 + (-0.489) = 232.760m$$
$$H^2_{33} = H_{34} + \delta h^2_{34-33} = 232.760 + (-1.050) = 231.710m \quad (6.281)$$
$$H^2_{32} = H_{33} + \delta h^2_{33-32} = 231.710 + 0.712 = 232.422m$$

$$H^3_{P1} = H_{RN3} + \delta h^3_{RN3-P1} = 232.848 + (-0.583) = 232.265m$$
$$H^3_{P2} = H^3_{P1} + \delta h^3_{P1-P2} = 232.265 + (-0.493) = 231.772m$$
$$H^3_{P3} = H^3_{P2} + \delta h^3_{P2-P3} = 231.772 + 0.292 = 232.064m$$
$$H^3_{32} = H^3_{P3} + \delta h^3_{P3-32} = 232.064 + 0.358 = 232.422m$$

c. Calculul cotelor punctelor radiate pentru profilul 30+77

$$H'_{V_{S2}} = H_{30} + a_2 = 233.258 + 0.949 = 234.207\text{m}$$
$$H''_{V_{S2}} = H_{31} + b_2 = 232.064 + 2.144 = 234.208\text{m} \quad (6.282)$$

$$H_{V_{S2}} = \frac{H'_{V_{S2}} + H''_{V_{S2}}}{2} = \frac{234.207 + 234.208}{2} = 234.208\text{m} \quad (6.283)$$

$$H_{+19} = H_{V_{S2}} - c_{+19} = 234.208 - 1.543 = 232.665\text{m}$$
$$H_{st+12} = H_{V_{S2}} - c_{st+12} = 234.208 - 1.711 = 232.497\text{m}$$
$$H_{st+24} = H_{V_{S2}} - c_{st+24} = 234.208 - 1.428 = 232.780\text{m} \quad (6.284)$$
$$H_{dr+14} = H_{V_{S2}} - c_{dr+14} = 234.208 - 2.119 = 232.089\text{m}$$
$$H_{dr+25} = H_{V_{S2}} - c_{dr+25} = 234.208 - 2.996 = 231.212\text{m}$$
$$H_{+77} = H_{V_{S2}} - c_{+77} = 234.208 - 1.589 = 232.619\text{m}$$

Identic se procedează și pentru celelalte puncte radiate.

Carnet de nivelment

Tabelul 6-16

Nr.statiei	Pct.vizat	CITIRI PE MIRĂ					Diferențe de nivel		Altitudinea planului de vizare	Altitudini absolute	Observații
		Inregistrate			Medii						
		Inapoi	Inter-mediare	Inainte	Inapoi	Inainte	+	-			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_1	RN_1	3160			2859		1130			**232.127**	
		2859					+1				
		2560					1131				
	30			2030		1729					
				1729							
				1428							
S_2	30	1200			0949			1195		**233.258**	
		0949						+1			
		0699						1194			
	31			2396		2144					
				2144							
				1892							
	+19		1543						H_V=234.207	*232.664*	
	St+12		1711							*232.496*	
	St+24		1428							232.979	
	Dr+14		2119							*232.088*	
	Dr+25		2996							*231.211*	
	+77		1589							*232.618*	
S_3	31	2772			2521		358			**232.064**	
		2521					+0				
		2270					358				
	32			2413		2163				**232.422**	
				2163							
				1913							
	+26		2460						H_V=234.584	*232.124*	
	St+11		2112							*232.472*	
	St+22		1631							*232.953*	
	Dr+16		2436							*232.148*	
	+69		2002							*232.582*	
S_{3a}	Dr+16		1215						H_V=233.363	*232.148*	
	Dr+36		2924							*230.439*	
	Dr+48		3691							*229.672*	

	Control foaie nivelment $\Sigma a_i - \Sigma b_i = \Sigma \delta h' = 6.329 - 6.036 = 0.293$	
	e_h = -1.3 mm	$T_h = \pm 11.3$ mm
	c_h = +1.3 mm	q_h = 0.003997

0721882332 Rony
0727219143

Carnet de nivelment

Tabelul 6-17

Nr.statiei	Pct.vizat	CITIRI PE MIRĂ					Diferențe de nivel		Altitudinea planului de vizare	Altitudini absolute	Observații
		Înregistrate			Medii						
		Înapoi	Inter-mediare	Înainte	Înapoi	Înainte	+	-			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_7	RN_2	2435			2318			574		**233.823**	
		2318						0			
		2200						574			
	35			3005		2892					
				2892							
				2779							
S_6	35	2372			2120			488	H_V=235.367	**233.249**	
		2120						-1			
		1870						489			
	34			2857		2608					
				2608							
				2358							
	+70		2132							*233.235*	
	+25		2662							*232.705*	
S_5	34	1790			1541			1048	H_V=234.298	**232.760**	
		1541						-2			
		1290						1050			
	33			2840		2589					
				2589							
				2338							
	+50		1491							*232.807*	
	+30		2123							*232.175*	
S_4	33	2910			2658		714		H_V=234.366	**231.710**	
		2658					-2				
		2406					712				
	32			2196		1944				**232.422**	
				1944							
				1892							
	+67		2433							*231.933*	
	+33		1998							232.368	
		Control foaie nivelment $\Sigma a_i - \Sigma b_i = \Sigma \delta h' = 8637-10033 = -1.396$									
		e_h = +6 mm			$T_h = \pm 11.8$ mm						
		c_h = -6 mm			q_h = -0.01647						

Carnet de nivelment

Tabelul 6-18

Nr.statiei	Pct.vizat	CITIRI PE MIRĂ					Diferențe de nivel		Altitudinea planului de vizare	Altitudini absolute	Observații
		Inregistrate			Medii						
		Inapoi	Inter-mediare	Inainte	Inapoi	Inainte	+	-			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_8	RN_3	2302			2002			584 +1 583		**232.848**	
		2002									
		1702									
	P_1			2886		2586					
				2586							
				2286							
S_9	P_1	1892			1714			494 +1 493	H_V=233.979	**232.265**	
		1714									
		1536									
	P_2			2385		2208					
				2208							
				2030							
	R_1		1414							*232.565*	
	R_2		1314							*232.665*	
	R_3		1207							*232.772*	
S_{10}	P_2	1789			1693		291 +1 292		H_V=233.466	**231.773**	
		1693									
		1598									
	P_3			1495		1402					
				1402							
				1309							
	R_3		0690							*232.776*	
	R_4		0733							*232.733*	
	R_5R_1		1042							*232.424*	
S_{11}	P_3	2833			2550		356 2 358			**232.064**	
		2550									
		2268									
	32			2474		2194				**232.422**	
				2194							
				1915							
	Control foaie nivelment $\Sigma a_i - \Sigma b_i = \Sigma \delta h' = 7959-8390 = -0.431$										
	e_h= -4 mm						T_h= ±11.7 mm				

6.6. NIVELMENTUL TRIGONOMETRIC

6.6.1. Genaralități

Nivelmentul trigonometric se aplică la determinarea cotelor punctelor în terenuri accidentate. Pentru aceasta este necesar să determinăm, pe cale trigonometrică în funcție de unghiul de pantă α și de distanța dintre cele două puncte, diferența de nivel dintre două puncte (A și B fig. 6.37) cu relația:

$$\delta h_{AB} = D_{AB} * tg\alpha$$

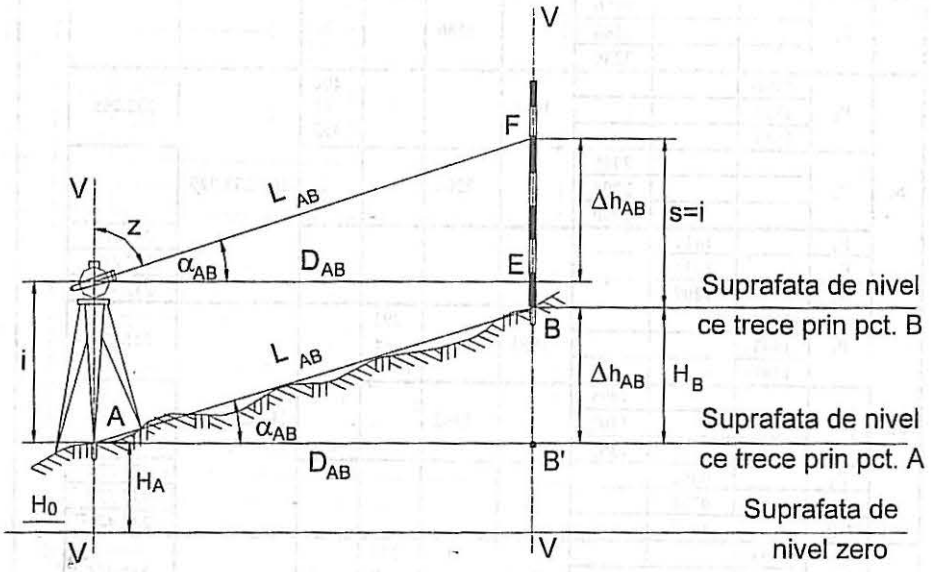


Figura 6.37
Nivelment trigonometric, cazul i=s

Unele instrumente măsoară complmentul unghiului de pantă, numit unghi zenital. În acest caz relația de calcul a diferenței de nivel este

$$\delta h_{AB} = D_{AB} * ctgZ \qquad (6.285)$$

Există instrumente care permit măsurarea directă a pantei terenului între două puncte p=tgα, în acest caz diferența de nivel se calculează cu relația:

$$\delta h_{AB} = p * D_{AB} \qquad (6.286)$$

Diferența redusă la orizont D_{AB} se obține fie prin măsurare directă în valoare orizontală D_{AB}, fie măsurând lungimea înclinată L_{AB} pe care ulterior o reducem la orizont (relatia 6.287), fie prin măsurare cu ajutorul stațiilor totale (cu valoare orizontală sau înclinată). Uneori distanța D_{AB} se calculează analitic din coordonatele punctelor A și B (relația 6.288).

$$D_{AB} = L_{AB} * \cos\alpha \qquad (6.287)$$

$$D = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \qquad (6.288)$$

Nivelmentul trigonometric este specific regiunilor deluroase, accidentate, el este folosit pentru determinarea înălțimilor unor obiective (stâlpi de înaltă tensiune, coșuri de fum, construcții înalte, etc) de la distanță.

Scopul nivelmentului trigonometric este determinarea cotelor. Acestea se calculează în funcție de diferențele de nivel obținute prin procedeul descris mai sus. Astfel cunoscând cota punctului A se poate determina cota punctului B (H_B):

$$\begin{aligned} H_B &= H_A + \delta h_{AB} \\ H_B &= H_A + D_{AB} * tg\alpha \\ H_B &= H_A + D_{AB} * ctgZ \end{aligned} \qquad (6.289)$$

Dacă se cunoște cota punctului B (H_{AB}) putem calcula cota punctului A (H_A):

$$\begin{aligned} H_A &= H_B - \delta h_{AB} \\ H_A &= H_B - D_{AB} * tg\alpha \\ H_A &= H_B - D_{AB} * ctgZ \end{aligned} \qquad (6.290)$$

Diferențele de nivel pot fi cu semnul +, când unghiul α este situat deasupra liniei orizontului sau cu semnul -, când unghiul α este situat sub linia orizontului. Semnul diferenței de nivel este dictat de semnul funcției trigonometrice tg_α pentru unghiul de pantă α.

Relațiile stabilite sunt valabile când nivelmentul trigonometric se execută pentru distanțe mici, se vizează mire sau prisme așezate vertical în punctul B, vizele sunt la înălțimea instrumentului (i) și paralele cu linia ce unește punctele A și B situate pe suprafața fizică a terenului.

În cazul când viza este mai lungă, în punctul vizat există un semnal topografic cu înălțimea determinată s la care se va face vizarea, cu ajutorul teodolitului sau stației totale se măsoară unghiurile de pantă α și se calculează diferențele de nivel cu relațiile

$$\delta h_{AB} = D_{AB} * tg\alpha + i - s \qquad (6.291)$$

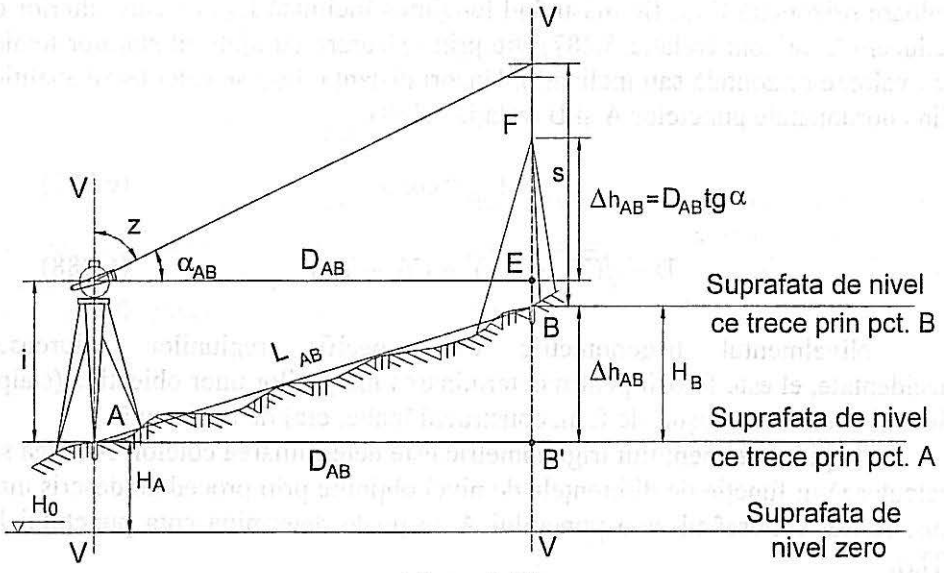


Figura 6.38
Nivelment trigonometric cazul $i \neq s$

Acest procedeu de executare a nivelmentului trigonometric se aplică pentru distanța $D_{AB} \leq 400m$.

Dacă distanța D_{AB} este mai lungă de 400m, atunci trebuie să se ia în considerare și efectul curburii pământului și al refracției atmosferice, diferența de nivel calculându-se în acest caz cu relația:

$$\delta h_{AB} = D_{AB} * tg\alpha + i - s + c \qquad (6.292)$$

- în care c este corecția totală datorită curburii pământului și a refracției atmosferice.

Pentru diferența de nivel dintre punctele A și B situate la 400m distanță între ele, efectul curburii pământului și al refracției atmosferice are valoarea de ~1cm, valoare situată mult sub limita preciziei nivelmentului trigonometric la această distanță. Din acest motiv, se poate considera nivelmentul trigonometric la care distanțele dintre puncte sunt până în 400m ca „nivelment trigonometric la distanță mică".

Nivelmentul trigonometric la care punctele între care se determină diferențele de nivel sunt situate la distanțe mai mari de 400m este considerat „nivelment trigonometric la distanță mare".

6.6.2. Metode de nivelment trigonometric

Metodele de executare a nivelmentului trigonometric sunt :
- drumuirile de nivelment trigonometric şi
- radierile de nivelment trigonometric.

6.6.2.1. Metoda drumuirii de nivelment trigonometric

Această matodă se desfăşoară, pe teren, simultan cu executarea drumuirii planimetrice.

După modul de sprijinire la capete, drumuirile de nivelment trigonometric se clasifică astfel:

a. drumuiri sprijinite la capete pe puncte de cote cunoscute;
b. drumuiri închise pe punctul de plecare;
c. drumuiri în „vânt";
d. drumuiri cu punct nodal.

1. Lucrări de teren

La metoda drumuirii de nivelment trigonometric se poate staţiona cu teodolitul în fiecare punct de staţie şi se măsoară unghiul vertical α în ambele sensuri (dus şi întors) fig. (6.39), sau se poate staţiona cu teodolitul din două staţii (procedeu numit cu staţii sărite). În această situaţie trebuie sporită atenţia deoarece unghiurile α sunt măsurate pentru jumătate din punctele de drumuire într-un sens, iar pentru cealaltă jumătate din punctele de drumuire în alt sens fig. (6.40).

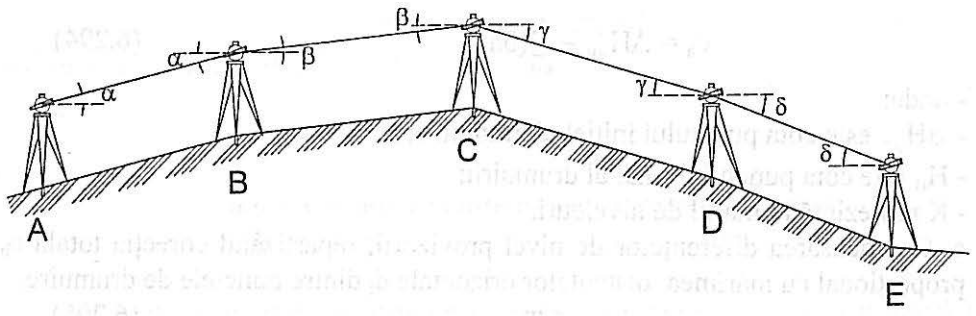


Figura 6.39
Drumuire de nivelment trigonometric cu staţii în fiecare punct

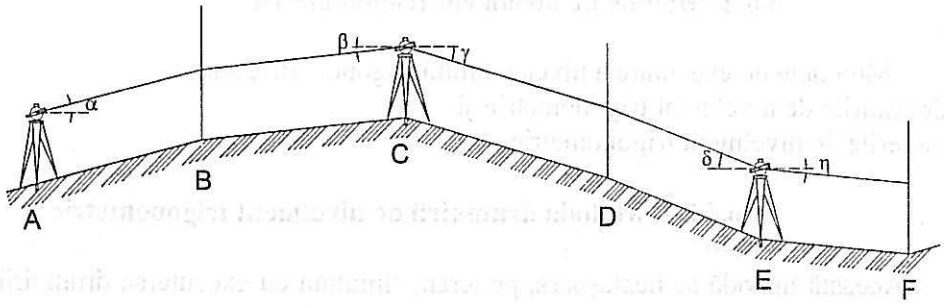


Figura 6.40
Drumuire de nivelment trigonometric cu stații sărite

Pentru măsurarea unghiurilor verticale se vizează la înălțimea instrumentului, numai în cazuri de excepție, când nu se poate viza la această înălțime, viza va fi la o înălțime considerabilă s.

Se măsoară direct cu panglica sau electronic cu stația totală distanțele înclinate sau orizontale dintre puncte de stație.

2. Lucrări de birou

Aceste lucrări constau în:

a. Calculul diferențelor de nivel provizorii:

$$\delta h_{AB} = Dij * tg\alpha_i + (i - s) \qquad (6.293)$$

b. Calculul corecției c_h de închidere a diferențelor de nivel provizorii, verificând respectarea condiției de toleranță:

$$c_h = \Delta H_{AB} - \sum_{k=1}^{n} (\delta h_{ij})_j \qquad (6.294)$$

- unde:
- ΔH_{AB} este cota punctului inițial al drumuirii;
- H_B este cota punctului final al drumuirii;
- K reprezintă numărul de niveleuri.

c. Compensarea diferențelor de nivel provizorii, repartizând corecția totală c_h proporțional cu mărimea distanțelor orizontale d_j dintre punctele de drumuire:

$$c_h \leq T_h \qquad (6.295)$$

$$c_i = \frac{c_h}{\sum_{k=1}^{n} d_k} * d_k = U * d_k * d_k \qquad (6.296)$$

- unde:
- T_h reprezintă toleranța admisibilă pentru această drumuire și se calculează cu relația:

$$T_h = \pm 20cm * \sqrt{\sum_{k=1}^{n} dk_{km}} \qquad (6.297)$$

d. Calculul diferențelor de nivel compensate:

$$\delta h_{ij} = \delta h_{ij} + c_i \qquad (6.298)$$

e. Calculul cotelor definitive ale punctelor se face la fel ca la drumuirea de nivelment geometric.

6.6.2.2. Metoda radierii de nivelment trigonometric

Metoda radierii se aplică, de obicei, simultan cu metoda drumuirii, se utilizează pentru determinarea cotelor punctelor radiate (punctele de detaliu). Cotele sunt determinate față de cota punctului de stație din care s-au măsurat unghiurile verticale α și distanțele până la punctele radiate.

Cotele acestor puncte se calculează ce relațiile:

$$H_i = H_{PS} + \delta h_{PS-I} \qquad (6.299)$$

- în care:
- H_i - reprezintă cota punctului radiat i;
- H_{PS} - reprezintă cota punctului de stație din care s-au normat unghiurile α;
- δh_{PS-i} - reprezintă diferența de nivel dintre punctul de stație PS și punctele radiate.

Diferențele de nivel δh_{PS-i} vor fi calculate astfel:

$$\delta h_{PS-i} = D_{PS-i} * tg\alpha_i + (i - s) \qquad (6.300)$$

- dacă i=s relația (6.300) devine:

$$h_{PS-I} = D_{PS-I} * tg\alpha \qquad (6.301)$$

6.6.2.3. Ponderea într-o drumuire de nivelment trigonometric

Stabilirea ponderilor pornește de la relația care permite calculul diferenței de nivel dintre două puncte:

$$\delta h_{ij} = d_{ij} * tg\alpha_i \qquad (6.302)$$

- unde:
- δh_{ij} - este diferența de nivel dintre punctele i și j;
- d_{ij} - este distanța orizontală dintre punctele i și j;
- α_i - este unghiul de pantă între punctele i și j.

Dacă notăm cu e_h eroarea de determinare a diferenței de nivel dintre două puncte, cu e_d eroarea de determinare a distanței d_{ij} și cu e_α eroarea de determinare a unghiului α, în conformitate cu legea de propagare a erorilor rezultă:

$$e_h = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial \delta h_{ij}}{\partial d_{ij}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta h_{ij}}{\partial \alpha}\right)^2} = \pm\sqrt{(e_d * tg\alpha)^2 + \left(\frac{d}{\cos^2 \alpha} * \frac{e_\alpha}{\rho^{cc}}\right)^2} \qquad (6.303)$$

în care:

$\frac{\partial \delta h_{ij}}{\partial d_{ij}}$ - este derivata parțială a funcției ∂h_{ij} în raport cu distanța;

$\frac{\partial h_{ij}}{\partial \alpha}$ - este derivata parțială a funcției ∂h_{ij} în raport cu unghiul α;

$\rho^{cc} = 636\,620^{cc}$.

Pentru unghiuri de pantă mici, eroarea e_d de măsurare a distanței nu influențează rezultatul decât într-o mică măsură, $(e_d * tg\alpha)^2$ poate fi neglijat, astfel că expresia de mai sus devine:

$$e_h = \frac{d}{\cos\alpha} * \frac{e_\alpha}{\rho^{cc}} \qquad (6.304)$$

- ceea ce înseamnă că eroarea de determinare a diferenței de nivel poate fi considerată ca o variație a expresiei ce ne oferă calculul diferenței de nivel în funcție numai de variația unghiului de pantă α.

La executarea unei lucrări precizia de măsurare a unghiurilor de pantă este aceiași pentru toate unghiurile, ceea ce înseamnă că eroarea este direct proporțională cu măsurarea distanței, astfel că putem scrie:

$$e_h = e_\alpha * d \qquad (6.305)$$

Aceasta este expresia erorii de determinare a diferenței de nivel dintre două puncte de drumuire succesive. O drumuire este însă formată din mai multe aliniamente.

Conform legii de propagare a erorilor, pentru o drumuire cu lungimea totală D=n+d în care avem n aliniamente, fiecare cu lungimea d, va fi:

$$E_h = e_h \sqrt{\frac{D}{d}} = \frac{e_h}{\sqrt{d}} \sqrt{D} \qquad (6.306)$$

Valoarea $\frac{e_h}{d}$ poate fi considerată egală cu q doar pentru o singură lucrare, variația de la un traseu la altul fiind lungimea totală a acestora, adică distanța D. Atunci relația (6.306) poate fi scrisă:

$$E_h = q\sqrt{D} \qquad (6.307)$$

Pentru a calcula ponderea avem în vedere ca aceasta, potrivit teoriei de prelucrare a măsurătorilor geodezice, se calculează cu relația:

$$P = \frac{k}{E_h^2} \qquad (6.308)$$

- unde k este o constantă arbitrar aleasă, înlocuind relația (6.307) în relația (6.308) obținem:

$$P = \frac{k}{q^2 D} \qquad (6.309)$$

Dacă alegem $k = q^2$ relația (6.309) devine:

$$P = \frac{1}{D} \qquad (6.310)$$

Deoarece am considerat d=n+D relația (6.306) poate fi scrisă:

$$E_h = e_h \sqrt{n} \qquad (6.311)$$

- de unde, conform raționamentelor de mai sus, rezultă:

$$p = \frac{1}{n} \qquad (6.312)$$

- în care n este numărul stațiilor.

În practică sunt utilizate atât relațiile (6.310) cât şi relațiile (6.312).

6.6.2.4. Precizia în nivelmentul trigonometric

Din punct de vedere al preciziei, nivelmentul trigonometric se situează pe plan inferior nivelmentului geometric.. La nivelmentul trigonometric diferențele de nivel sunt calculate în funcție de două elemente măsurate, unghiuri și distanțe, ambele afectate de erori inerente procesului de măsurare.

Preciziile pe care le obținem la nivelmentul trigonometric depind de preciziile de măsurare a unghiurilor α și a distanțelor. Dacă notăm cu h diferența de nivel, cu D distanța redusă la orizont și cu α unghiul de pantă, atunci avem forma expresiei generale cu care obținem diferența de nivel:

$$h=D*tg\alpha \qquad (6.313)$$

Relația (6.313) este o funcție de variabilele D și α. Fiecare variabilă provoacă câte o eroare. Fie E_h eroarea totală de determinare a diferenței de nivel, h_α eroarea provocată la determinarea diferenței de nivel de imprecizia măsurării unghiului α și h_D erorea provocată la determinarea diferenței de nivel de imprecizia de determinare a distanței D. În conformitate cu legea de propagare a erorilor întâmplătoare, erorea totală va fi:

$$E_h=\pm\sqrt{h_\alpha^{\,2}+h^2{}_D} \qquad (6.314)$$

Valorile erorilor h_α și h_D rezultă prin diferețierea expresiei $h=D*tg\alpha$, în care e_D reprezintă eroarea de măsaurare a distanței D și e_α reprezintă eroarea de măsurare a unghiului α, iar $\rho^{cc}=636\,620^{cc}$.

$$h_\alpha=\frac{D}{\cos^2\alpha}*\frac{e_\alpha}{\rho^{cc}} \qquad (6.315)$$
$$h_D=e_D*tg\alpha$$

Ca exemplu considerăm că: D=100m, $e_\alpha=\pm100^{cc}$ și $e_D=\pm4$cm la 100m.

1. cazul I : $\alpha\approx0$

înlocuind valorile în relațiile (6.315) avem:

$$h_\alpha=\frac{100*100*100^{cc}}{\cos0*636620}=\pm1.57\text{cm}$$
$$h_D=0.04*100*tg0=0.0\text{cm} \qquad (6.316)$$
$$E_h=\sqrt{1{,}57^2+0.00^2}=1.57\text{cm}$$

2. cazul II : $\alpha \approx 25^G$

$$h_\alpha = \frac{100 * 100^{cc} * 100}{\cos 25 * 636620^{cc}} = \pm 1.70\text{cm}$$
$$h_D = 0.04 * 100 * \text{tg}25 = 1.65\text{cm} \qquad (6.317)$$
$$E_h = \sqrt{1{,}70^2 + 1{,}65^2} = 2.37\text{cm}$$

Din relațiile de mai sus rezultă că eroarea de distanță este neglijabilă în cazul unghiurilor de pantă mici, ea crește odată cu creșterea valorii unghiului α. La măsurarea erorii astfel calculate trebuie să i se mai adauge și eroarea de amăsurare a înălțimii i a teodolitului (E_i) cât și eroarea de măsurare a înălțimii s a semnalului vizat (E_S).
Eroarea totală de determinare a diferenței de nivel E_{ht} va fi:

$$E_{ht}=\pm\sqrt{E^2{}_h+E^2{}_i+E^2{}_s} \qquad (6.318)$$

Ca exemplu considerăm E_h=±2cm, E_i=1cm și E_s=1cm, rezultă:

$$E_{ht}=\pm\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\pm 2{,}5\text{cm} \qquad (6.319)$$

Toleranța se consideră în general ca fiind dublul erorii, pentru acest caz T=5cm la 100m, rezultă:

$$T_{km}= 5\sqrt{\frac{1000}{100}} \approx 16\text{cm} \qquad (6.320)$$

Se știe că toleranțele sunt stabilite după necesități. Dacă se urmărește o precizie mai mare, se va alege un teodolit mai precis cu care să măsurăm unghiul α, va fi asigurată o măsurare mai precisă pentru distanța D, pentru înălțimea instrumentului i și pentru înălțimea semnalului s.

Precizia în nivelmentul trigonometric, comparativ cu nivelmentul geometric, este considerată destul de slabă, mai cu seamă în terenurile de șes, în timp ce în terenurile accidentate și foarte accidentate, precizia nivelmentului trigonometric se consideră a fi bună.

7. COMPENSĂRI RIGUROASE

7.1. *COMPENSAREA RIGUROASĂ A UNEI DRUMUIRI PLANIMETRICE PRIN METODA MASURATORILOR INDIRECTE*

Drumuirea planimetrică, de orice tip, are ca elemente măsurate direcţiile şi laturile acesteia, motiv pentru care, din punctul de vedere al teoriei prelucrării măsurătorilor geodezice, putem trata această problemă ca o problemă de compensare a măsurătorilor eterogene.

Prin măsurători eterogene vom înţelege acele măsurători care prezintă diferenţe în ceea ce priveşte natura elementelor măsurate (direcţii, laturi, diferenţe de nivel etc.) acestea urmând a fi compensate în comun.

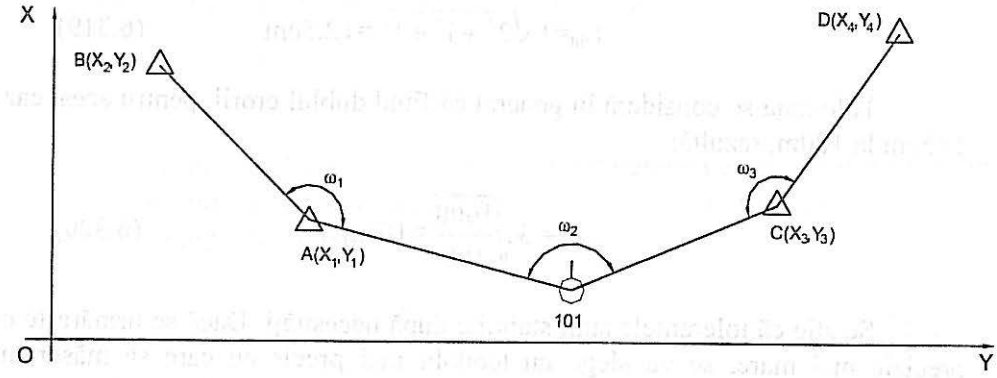


Figura 7.1
Drumuire sprijinită la capete pe puncte
de coordonate cunoscute şi orientări cunoscute

Din punct de vedere teoretic dispunem de mai multe mărimi G_1' şi G_1'' de natură diferită ce urmează a fi supuse în bloc compensării. În acest caz condiţia de minim care guvernează toată compensarea se exprimă sub forma:

$$[p'v'v'] + [p''v''v''] = \text{minim} \qquad (7.1)$$

Expresiile ponderilor p' şi p" vor fi calculate cu relaţiile:

$$p' = \frac{constanta}{(\sigma')^2}$$
$$p'' = \frac{constanta}{(\sigma'')^2} \qquad (7.2)$$

- unde: σ_i reprezintă precizia cu care au fost determinate elementele măsurate.

Înlocuind ultimele expresii în primele obţinem:

$$\left[\left(\frac{v'}{\sigma'}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{v''}{\sigma''}\right)^2\right] = minim \qquad (7.3)$$

- dacă notăm:

$$\overline{v'} = \frac{v'}{\sigma'}$$
$$\overline{v''} = \frac{v''}{\sigma''} \qquad (7.4)$$

- vom obţine corecţii adimensionale, măsurătorile fiind acum de acceaşi pondere, ce reprezintă o simplificare a calculelor de compensare.

Rezultă că pentru omogenizarea ecuaţiilor de corecţie, acestea vor fi împărţite cu precizia σ individuală a fiecărei măsurători.

Pentru calculul ponderilor se va avea în vedere:

1. - să se folosească aceiaşi constantă pentru calculul tuturor ponderilor;
2. - valoarea unităţii de pondere va fi exprimată în aceiaşi unitate de măsură ca şi v şi l din ecuaţiile de corecţie respective.

Compensarea decurge apoi după metoda măsurătorilor indirecte neponderate astfel:

1. Scriem sistemul liniar al ecuaţiilor de corecţie:

$$A*X+L=V \qquad (7.5)$$

2. Sistemul se poate rezolva dacă se foloseşte condiţia impusă de metoda celor mai mici pătrate:

$$V^TV=minim \qquad (7.6)$$

3. Rezultă sistemul normal al ecuaţiilor de corecţie:

$$A^TAX+A^TL=0 \qquad (7.7)$$

4. Rezolvarea conduce la determinarea parametrilor X:

$$X=-(A^TA)^{-1}A^TL \tag{7.8}$$

5. Calculul preciziilor

a. Abaterea standard empirică pentru o singură măsurătoare:

$$\sigma_0=\sqrt{\frac{V^TV}{n-h}} \tag{7.9}$$

- unde: n reprezintă numărul de măsurători, h reprezintă numărul de necunoscute.

b. Erorile individuale ale punctelor:

$$\sigma_X^{(i)}=\pm\sigma_0\sqrt{Q_{XX}^{(i)}}$$
$$\sigma_Y^{(i)}=\pm\sigma_0\sqrt{Q_{YY}^{(i)}} \tag{7.10}$$

c. Elipsa erorilor:

$$Q_{max}=\frac{Q_{XX}+Q_{YY}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(Q_{XX}-Q_{YY})^2+4Q^2_{XY}}$$
$$Q_{min}=\frac{Q_{XX}+Q_{YY}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(Q_{XX}-Q_{YY})^2+4Q^2_{XY}} \tag{7.11}$$

c1. semiaxele elipsei erorilor:

$$a=\sigma_0\sqrt{Q_{max}}$$
$$b=\sigma_0\sqrt{Q_{min}} \tag{7.12}$$

c2. unghiul de înclinare față de axa OY a semiaxei mari a elipsei de erori:

$$\varphi=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{2Q_{XX}}{Q_{XX}-Q_{YY}} \tag{7.13}$$

- cu mențiunea că domeniul pentru unghiul φ este definit în tabelul de mai jos:

Domeniul de definiție a unghiului φ

Tabel 7-1

	$Q_{XY\geq 0}$	$Q_{XY<0}$
$(Q_{XX}-Q_{YY})>0$	$0<\varphi\leq 50^G$	$150^G<\varphi<200^G$
$(Q_{XX}-Q_{YY})<0$	$50<\varphi<100^G$	$100<\varphi<150^G$

7.1.1. Exemplu. Compensarea riguroasă a unei drumuiri planimetrice prin metoda măsurătorilor indirecte

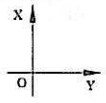
1. Date inițiale:

Punctele vechi A, B, C şi D sunt de coordonate cunoscute, marcate, recunoscute şi identificate pe teren.

Punctul 101 este nou, dorim să-i determinăm coordonatele planimetrice X şi Y.

Inventar cu coordonatele punctelor vechi A, B, C, D
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 7-2



Pct	X [m]	Y [m]
A	7236.456	2456.235
B	8153.581	1698.861
C	7273.505	2655.757
D	7570.732	3567.591

2. Măsurători

Direcțiile orizontale compensate în stație centrate, reduse şi reduse la planul de proiecție

Tabelul 7-3

PS	PV	Direcții măsurate [g c cc]	Precizii [cc]
A	B	119 .13 00	50
	101	293 .61 00	50
101	A	275. 94 00	50
	C	10. 19 00	50
C	101	17. 34 00	50
	D	232. 50 00	50

Distanțe orizontale

Tabel 7-4

De la	La	Distanțe orizontale [m]	Precizia [cm]
A	101	85.35	2
101	C	145.55	2.5

3. Schița drumuirii

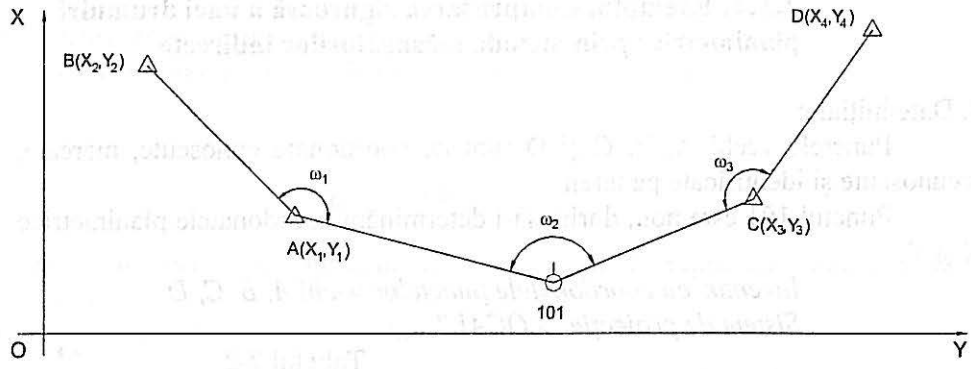


Figura 7.2
Drumuire sprijinită la capete pe puncte
de coordonate cunoscute şi orientări cunoscute

4. Etape de calcul

a. Calculul orientărilor şi a distanțelor între punctele vechi:

Calculul coordonatelor provizorii se face prin metoda drumuirii, fără compensare.

Calculul orientărilor şi distanțelor între punctele vechi

Tabel 7-5

Pct.	X [m]	Y [m]	Orientarea tgθ/θ [g c cc]	Distanța [m]
A	7236.456	2456.235	tg θ=-0.813	1189.426
B	8153.581	1698.861		
Δ	917.125	757.374	356. 05 51	
C	7273.505	2655.757	tg θ=3.067803	959.054
D	7570.732	3567.591		
Δ	297.227	911.834	79. 93 97	

b. Calculul orientărilor şi distanțelor provizorii:

$$\theta_{A\text{-}101}=\theta_{AB}+\omega_A=356.\ 05\ 51+174.\ 48\ 00=130.\ 53\ 51$$
$$\theta_{101\text{-}C}=\theta_{A\text{-}101}+200+\omega_{101}=130.\ 53\ 51+200+134.\ 25\ 00=64.\ 78\ 51 \qquad (7.14)$$
$$\theta^{calculat}_{CB}=\theta_{101\text{-}C}+200+\omega_C=69.\ 18\ 16+200+215.\ 16\ 00=79.\ 94\ 51$$

Calculul orientărilor și distanțelor provizorii Tabel 7-6

Pct.	X [m]	Y [m]	Orientarea $tg\theta^0/\theta^0$ [g c cc]	Distanța D^0 [m]
A	7236. 456	2456. 235	$tg\theta$= -1. 922485 θ^0=130 53 52	85. 35
101	7197. 070	2531. 954		
Δ	-39. 386	75. 719		
101	7197. 070	2531. 954	$tg\theta$=1. 619716 θ^0=64 78 79	145. 497
C	7273. 505	2655. 757		
Δ	76. 435	123. 803		

c. Determinarea coordonatelor provizorii:

$X_{101}=X_A+D_{A\text{-}101}*\cos\theta_{A\text{-}101}=7236.456+85.35*\cos 130.\ 53\ 51=7197.070$

$Y_{101}=Y_A+D_{A\text{-}101}*\sin\theta_{A\text{-}101}=2456.235+85.35*\sin 130.5351=2531.954$ (7.15)

Pentru control:

$X'_C=X_{101}+D_{101\text{-}C}*\cos\theta_{101\text{-}C}=7197.070+145.\ 55\ 00*\cos 64.\ 78\ 51=7273.538$

$Y'_C=Y_{101}+D_{101\text{-}C}*\sin\theta_{101\text{-}C}=2531.954+145.55*\sin 64.\ 78\ 51=2655.798$ (7.16)

d. Scrirea sistemului liniar al ecuațiilor de corecție:

d1. forma generală pentru ecuația unei direcții dintre două puncte noi i și j este:

$$v_{ij}=-d_{zi}+a_{ij}dx_j+b_{ij}dy_j-a_{ij}dx_i-b_{ij}dy_{i+}l_{ij} \quad (7.17)$$

d2. forma generală pentru direcțiile măsurate între două puncte vechi:

$$v_{AB}=-d_{zA}+l_{AB} \quad (7.18)$$

d3. forma generală pentru direcțiile măsurate între un punct vechi A și un punct nou j:

$$v_{Aj}=-d_{ZA}+a_{Aj}d_{xj}+b_{Aj}d_{yj}+l_{Aj} \quad (7.19)$$

d4. forma generală pentru direcțiile măsurate între un punct nou i și un punct vechi B:

$$v_{iB}=-d_{zi}-a_{iB}d_{xi}-b_{iB}d_{yi}+l_{iB} \quad (7.20)$$

- în care:

$-d_{zA}$ - reprezintă corecția ce se va aplica unghiului mediu de orientare în stația A;

- a_{ij} și b_{ij} - reprezintă coeficienții de direcție ce exprimă variația orientării pe unitatea de lungime și se determină cu relația:

$$a_{ij}=-\rho^{cc}\frac{\Delta Y_{ij}^{0}}{\left(D_{ij}^{0}\right)^{2}}=-\rho^{cc}\frac{\sin\theta_{ij}^{0}}{D_{ij}} \qquad (7.21)$$

$$b_{ij}=+\rho^{cc}\frac{\Delta X_{ij}^{0}}{\left(D_{ij}^{0}\right)^{2}}=+\rho\frac{\cos\theta_{ij}^{0}}{D_{ij}^{0}}$$

- unde:
- diferențele ΔX, ΔY și θ_{ij} sunt calculate folosind coordonatele provizorii ale punctelor noi;
- l_{ij} reprezintă termenul liber al ecuației ce corespunde direcției dintre punctele i și j și se calculează cu relația:

$$l_{ij}=Z_{ij}-Z_{ij}^{mediu} \qquad (7.22)$$

- unde: i - reprezintă stația și j - reprezintă vizele.

d5. forma generală pentru ecuația unei distanțe măsurate pe teren centrată, redusă și redusă la planul de proiecție este:

$$v_{ij}=a_{ij}d_{xj}+b_{ij}d_{yj}+c_{ij}d_{xi}+d_{ij}d_{yi}+l_{ij} \qquad (7.23)$$

- unde:

$$a_{ij}=\frac{X_j^0-X_i^0}{D_{ij}^0}=\cos\theta_{ij}^0$$

$$b_{ij}=\frac{Y_j^0-Y_i^0}{D_{ij}^0}=\sin\theta_{ij}^0 \qquad (7.24)$$

$$c_{ij}=-\frac{X_j^0-X_i^0}{D_{ij}^0}=-\cos\theta_{ij}^0$$

$$d_{ij}=-\frac{Y_j^0-Y_i^0}{D_{ij}^0}=-\sin\theta_{ij}^0$$

$$l_{ij}=d_{ij}^{calculat}-d_{ij}^{măsurat}$$

e. Orientarea stațiilor:

e1. orientarea stației A:

$Z'_A=\theta_{AB}-dir_{AB}=356\ 05\ 52-119\ 13\ 00=236\ 92\ 52$ (7.25)

$Z''_A=\theta^0_{A\text{-}101}-dir_{A\text{-}101}=130\ 53\ 52+400-293\ 61\ 00=263\ 92\ 52$

$$Z_A^{mediu}=\frac{Z'_A+Z''_A}{2}=236\ 92\ 52$$

e2. orientarea stației 101:

$$Z'_{101}=\theta^{0}_{101\text{-}A}-dir_{101\text{-}A}=330\ 53\ 52-275\ 94\ 00=54\ 59\ 517$$
$$Z''_{101}=\theta^{0}_{101\text{-}C}-dir_{101\text{-}C}=64\ 78\ 79-10\ 19\ 00=54\ 59\ 793 \qquad (7.26)$$
$$Z_{101}^{mediu}=\frac{Z'_{101}+Z''_{101}}{2}=54\ 59\ 655$$

e3. orienatarea stației C:

$$Z'_{C}=\theta^{0}_{C\text{-}101}-dir_{C\text{-}101}=264\ 78\ 79-17\ 34\ 00=247\ 44\ 794$$
$$Z''_{C}=\theta_{CD}-dir_{CD}=79\ 93\ 97+400-232\ 50\ 00=247\ 43\ 976 \qquad (7.27)$$
$$Z_{C}^{mediu}=\frac{Z'_{C}+Z''_{C}}{2}=247\ 44\ 385$$

f. Scriem sistemul liniar al ecuației de corecție pentru direcții și pentru distanțe, calculăm termenii liberi (pentru direcții în secunde și pentru distanțe în milimetri), evidențiem preciziile cu care au fost determinate direcțiile și distanțele.

Calculul coeficienților de direcție

Tabel 7-7

Direc-ția	Pct A	Pct101			Pct C	Temen liber(cc)	Precizia înainte de compensare
	dz_A	dz_{101}	dx_{101}	dz_C	dz_C		
A-B	-1	0	0	0	0	0.0	$\pm 50^{cc}$
A-101	-1	0	-661.7255	-344.2032	0	0.0	$\pm 50^{cc}$
101-A	0	-1	-661.7255	-344.2032	0	-13.8	$\pm 50^{cc}$
101-C	0	-1	+372.3067	-229.8592	0	+13.8	$\pm 50^{cc}$
C-101	0	0	+372.3067	-229.8592	-1	+40.9	$\pm 50^{cc}$
C-D	0	0	0	0	-1	-40.9	$\pm 50^{cc}$
							τ_{dm}
A-101	0	0	-0.4615	+0.8872	0	0.00	±0.2
101-C	0	0	-0.5253	-0.8509	0	-0.53	±0.25

Matricea de configurare omogenizată și termenii liberi omogenizați se obțin prin împărțirea coeficienților ecuațiilor de corecții și a termenilor liberi cu preciziile corespunzătoare mărimilor care generează ecuațiile.

$$A=\begin{bmatrix} -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.02 & 0 & -13.2345 & -6.8841 & 0 \\ 0 & -0.02 & -13.2345 & -6.8841 & 0 \\ 0 & -0.02 & +7.4461 & -4.5972 & 0 \\ 0 & 0 & +7.4461 & -4.5972 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0 & -2.3073 & +4.4358 & 0 \\ 0 & 0 & -2.1013 & -3.4036 & 0 \end{bmatrix} \quad TL=\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -0.28 \\ +0.28 \\ +0.82 \\ -0.82 \\ 0.00 \\ -2.10 \end{bmatrix} \qquad (7.28)$$

Matricea sistemului normal şi termenii liberi normalizaţi:

$$A^T*A=\begin{bmatrix} 0.0008 & 0.0 & 0.2647 & 0.1377 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0008 & 0.1158 & 0.2296 & 0.0 \\ 0.2647 & 0.1158 & 470.9337 & 110.6692 & -0.1489 \\ 0.1377 & 0.2296 & 110.6692 & 168.3095 & 0.0919 \\ 0.0 & 0.0 & -0.1489 & 0.0919 & 0.0008 \end{bmatrix} \quad n=A^T*TL=\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 16.24 \\ 4.03 \\ 0.00 \end{bmatrix} \qquad (7.29)$$

Matricea de cofactori:

$$Q=N^{-1}=\begin{bmatrix} 1825.9365 & 682.8898 & -0.6820 & -2.0353 & 106.9533 \\ 682.8898 & 2471.6660 & 0.2032 & -4.3587 & 538.7762 \\ -0.6820 & 0.2032 & 0.0033 & -0.0024 & 0.8853 \\ -2.0353 & -4.3587 & -0.0024 & 0.0164 & -2.3234 \\ 106.9533 & 538.7762 & 0.8853 & -2.3234 & 1681.8229 \end{bmatrix} \qquad (7.30)$$

Vectorul parametrilor

$$dx=\begin{bmatrix} 19.28^{cc} \\ 14.28^{cc} \\ -0.04dm \\ -0.03dm \\ -5.00^{cc} \end{bmatrix} \qquad (7.31)$$

Vectorul corecţiilor omogenizate

$$\bar{v}=\begin{bmatrix} -0.3857 \\ +0.3857 \\ +0.2088 \\ -0.2088 \\ +0.7178 \\ -0.7178 \\ -0.0212 \\ -1.9175 \end{bmatrix} \qquad (7.32)$$

Vectorul corecţiilor reale

$$v=\begin{bmatrix} -19.3^{cc} \\ +19.3^{cc} \\ +10.4^{cc} \\ -10.4^{cc} \\ +35.9^{cc} \\ -35.9^{cc} \\ 0.00dm \\ -0.48dm \end{bmatrix} \qquad (7.33)$$

Coordonatele cele mai probabile pentru punctul 101:

$X_{101} = 7197.070 - 0.004 = 7197.066$ m (7.34)

$Y_{101} = 2531.954 - 0.003 = 2531.951$ m

Corectarea direcțiilor măsurate: Tabel 7-8

PS	PV	Direcții măsurate	Corecții cc	Direcții corectate
Δ	B	119.13.00	-19.3	119.12.81
A	101	293.61.00	+19.3	293.61.19
101	A	275.94.00	+10.4	275.94.10
	C	10.19.00	-10.4	10.18.90
C	101	17.34.00	+35.9	17.34.36
	D	232.50.00	-35.9	232.49.64

Corectarea distanțelor măsurate: Tabel 7-9

De la	la	Distanța măsurată	Corecția m	Distanță compensată
A	101	85.35	0.0	85.350
101	C	145.55	-0.048	145.502

Calcule de precizie:

- abaterea standard empirică a unității de pondere:

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{\overline{v^T v}}{n-u}} = \pm\sqrt{\frac{5.0924}{8-5}} = \pm 1{,}30 \qquad (7.35)$$

- erorile individuale ale coordonatelor punctului nou 101:

$$\sigma_{X_{101}} = \pm\sigma_0 \sqrt{Q_{XX}} = \left(1.30\sqrt{0.0033}\right)\text{dm} = \pm 0.74\text{cm}$$

$$\sigma_{Y_{101}} = \pm\sigma_0 \sqrt{Q_{YY}} = \left(1.30\sqrt{0.0164}\right)\text{dm} = \pm 1.67\text{cm} \qquad (7.36)$$

- erorile individuale ale distanțelor după compensare:

$$\sigma_{D_{A-101}} = \sigma_0 * \sigma^{\text{masurare}}_{D_{A-101}} = \pm 1.30 * 1.2\text{cm} = \pm 2.61\text{cm}$$

$$\sigma_{D_{A101-C}} = \sigma_0 * \sigma^{\text{masurare}}_{D_{A101-C}} = \pm 1.30 * 2.5\text{cm} = \pm 3.26\text{cm} \qquad (7.37)$$

- elipsa erorilor punctului 101 nou determinat:

$$a = 1.69 \text{ cm}$$
$$b = 0.70 \text{ cm} \qquad (7.38)$$
$$\varphi = 111^G 06^C$$

7.2. *COMPENSAREA RIGUROASĂ ÎN CAZUL DETERMINĂRII UNUI PUNCT PRIN INTERSECȚIE ÎNAINTE*

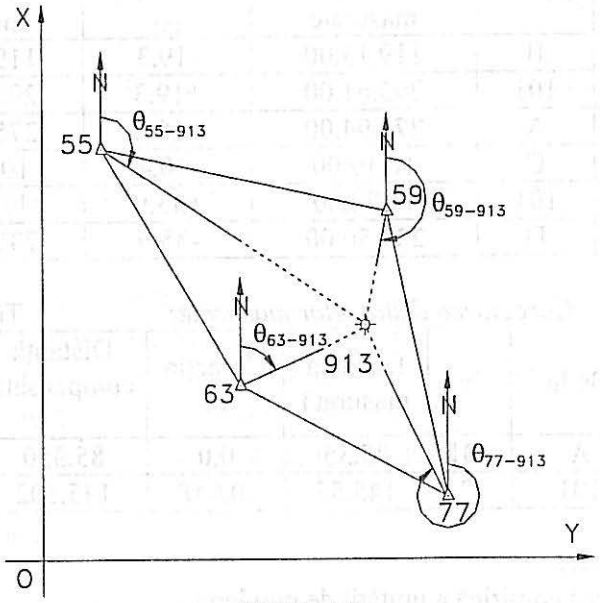


Figura 7.3
Determinarea punctului 913 prin intersecție înainte

În cazul unei intersecții înainte (simple sau multiple) vom măsura numai direcții din punctele vechi către alte puncte vechi şi către punctul nou ce urmează a fi determinat.

Din punct de vedere teoretic dispunem de mai multe mărimi M, de aceeaşi natură, ce urmează a fi supuse unui proces de compensare. În acest caz condiția de minim ce guvernează toată compensarea se exprimă sub forma:

$$[pvv] = \min \tag{7.39}$$

Ponderile p vor fi calculate cu relațiile:

$$p = \frac{constanta}{\sigma^2} \tag{7.40}$$

- unde σ reprezinta precizia cu care au fost determinate elementele măsurate.

Compensarea decurge după metoda măsurătorilor indirecte ponderate, astfel:

1. Scriem sistemul liniar al ecuațiilor de corecție:

$$V = A*X + L \tag{7.41}$$

2. Sistemul se poate rezolva dacă se folosește condiția impusă de metoda celor mai mici pătrate, relația (7.41) scrisă matricial are forma:

$$V^T PV = \min im \tag{7.42}$$

3. Rezultă sistemul normal al ecuațiilor de corecție:

$$A^T * P * A * X + A^T * P * L = 0 \tag{7.43}$$

4. Rezolvarea conduce la determinarea vectorului parametrilor X:

5. Calculul preciziilor:

a. Determinarea abaterii standard empirice pentru o singură măsurătoare:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{V^T PV}{n-h}} \tag{7.44}$$

- unde:
  - n reprezintă numărul de măsurători;
  - h reprezintă numărul de necunoscute.

b. Erorile individuale ale punctelor:

$$\sigma_x^i = \pm\sigma_0\sqrt{Q_{xx}^i} \qquad \sigma_y^i = \pm\sigma_0\sqrt{Q_{yy}^i} \tag{7.45}$$

c. Elipsa erorilor:

$$Q_{max} = \frac{Q_{XX}+Q_{YY}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(Q_{XX}-Q_{YY})^2 + 4Q^2_{XY}}$$
$$Q_{min} = \frac{Q_{XX}+Q_{YY}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(Q_{XX}-Q_{YY})^2 + 4Q^2_{XY}} \tag{7.46}$$

c1. semiaxele elipsei erorilor:

$$a = \sigma_0\sqrt{Q_{max}}$$
$$b = \sigma_0\sqrt{Q_{min}} \qquad (7.47)$$

c2. unghiul de înclinare față de axa OY a semiaxei mari a elipsei de erori:

$$\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2Q_{XX}}{Q_{XX} - Q_{YY}} \qquad (7.48)$$

Domeniul în care poate fi definit unghiul φ este redat în tabelul 7-1.

7.2.1 Exemplu. Compensarea riguroasă a coordonatelor punctului 913 determinat prin intersecție înainte

1. Date inițiale:

Punctele 55, 59, 77 şi 63 sunt de coordonate cunoscute, marcate, recunoscute, semnalizate şi identificate pe teren.

Punctul 913 este marcat şi eventual semnalizat pe teren, pentru el dorim să determinăm coordonatele compensate (cele mai probabile).

Inventar cu coordonatele punctelor vechi 55, 59, 77, 63
Sistem de proiecție "LOCAL"

Tabelul 7- 10

Pct.	X[m]	Y[m]
55	10 133.111	6 959.121
59	9 507.900	8 704.780
63	7 794.871	7 807.489
77	7 006.267	8 873.495

2. Măsurători:
Direcțiile orizontale, compensate în stații (55, 59, 77 si 63) centrate, reduse şi reduse la planul de proiecție sunt înregistrate în tabelele 3-5, 3-8, 3-14 si 3-11.

3. Schița vizelor:

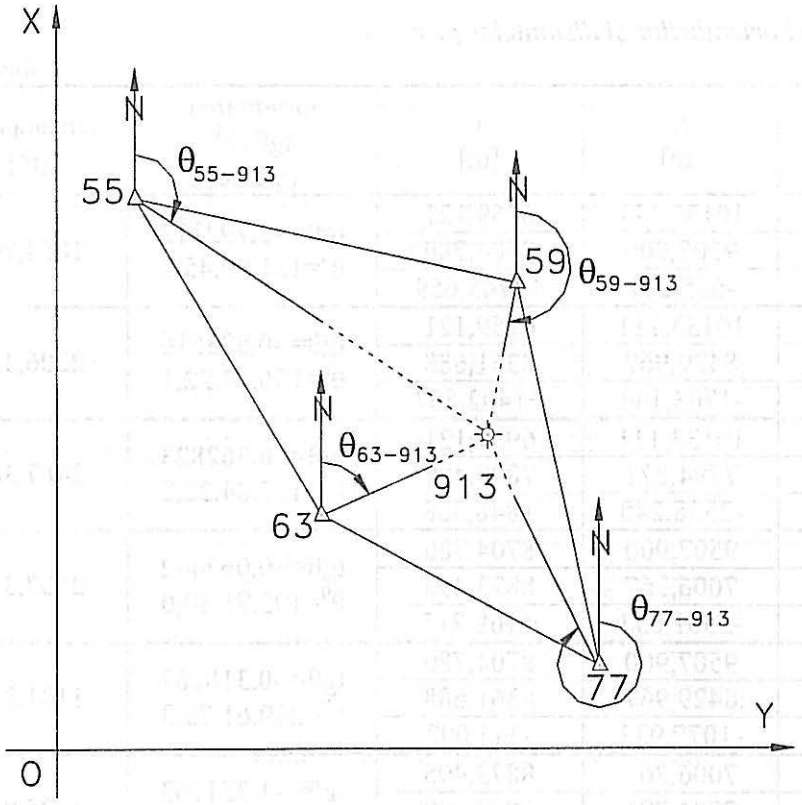


Figura 7.4
Schița vizelor necesare la determinarea punctului 913 prin intersecție înainte

4. Etape de calcul:

a. Calculul coordonatelor provizorii pentru punctul 913 se face prin intersecție înainte simplă, procedeul analitic sau trigonometric ca în tabelul 3–18, obținând:

$$X' = 8429{,}967$$
$$Y' = 8361{,}688 \qquad (7.49)$$

b. Calculul orientărilor şi distanţelor dintre puncte:

Calculul orientărilor şi distanţelor provizorii

Tabel 7-11

Pct.	X [m]	Y [m]	Orientarea $tg\theta^0/\theta^0$ [g c cc]	Distanţa D^0 [m]
55	10133,111	6959,121	$tg\theta$= -2,792112 θ^0=121.89.45,3	1854,242
59	9507,900	8704,780		
Δ	-625,211	+1745,659		
55	10133,111	6959,121	$tg\theta$= -0,823516 θ^0=156.14.22,1	2206,330
913	8429,967	8361,688		
Δ	-1703,144	+1402,567		
55	10133,111	6959,121	$tg\theta$= -0.362823 θ^0=177.84.22,8	2487,387
63	7794,871	7807,489		
Δ	-2338,240	+848,368		
59	9507,900	8704,780	$tg\theta$= -0.067442 θ^0=195.71.30,0	2507,316
77	7006,267	8873,495		
Δ	-2501,633	+168,715		
59	9507,900	8704,780	$tg\theta$= -0.318287 θ^0=219.61.73,3	1131,217
913	8429,967	8361,688		
Δ	-1077,933	-343,092		
77	7006,267	8873,495	$tg\theta$= -1.351763 θ^0=340.54.78,8	1325,996
63	7794,871	7807,489		
Δ	+788,604	-1066,006		
77	7006,267	8873,495	$tg\theta$= -0.359491 θ^0=378.02.99,5	1512,901
913	8429,967	8361,688		
Δ	+1423,700	-511,807		
63	7794,871	7807,489	$tg\theta$= +0.872622 θ^0=45.67.63,1	842,902
913	8429,967	8361,688		
Δ	+635,096	+554,199		

c. Calculul termenilor liberi se face cu relaţia:

$$l_{ij} = Z_{ij} - Z_{ij}^{mediu} \qquad (7.50)$$

Calculul termenilor liberi

Tabel 7-12

Pct. stație	Pct. vizat	Orientări θ	Direcții măsurate	Unghi de orientare (Z)	Termen liber (cc)
55	59	121.89.45,3	382.72.89	139.16.56,3	- 0,1
	913	156.14.21,1	16.97.64	139.16.58,1	+ 1,7
	63	177.84.22,8	38.67.68	139.16.58,4	- 1,6
				$Z_{55}^{med} = 139.16.56,4$	$\Sigma l = 0$
59	77	195.71.30,0	309.91.36	285.79.94,0	- 5,2
	913	219.61.73,3	333.81.75	285.79.98,3	- 0,9
	55	321.89.45,3	36.09.40	285.80.05,3	+ 6,1
				$Z_{59}^{med} = 285.79.99,2$	$\Sigma l = 0$
77	63	340.54.78,8	14.87.71	325.67.07,8	- 0,6
	913	378.02.99,5	52.35.90	325.67.09,5	+ 1,1
	59	395.71.30,0	70.04.22	325.67.08,0	- 0,5
				$Z_{77}^{med} = 325.67.08,4$	$\Sigma l = 0$
63	55	377.84.22,8	284.09.89	93.74.33,8	- 4,1
	913	45.67.63,1	351.93.22	93.74.41,1	+ 3,2
	77	140.54.78,8	46.80.40	93.74.38,8	+ 0,9
				$Z_{63}^{med} = 93.77.37,9$	$\Sigma l = 0$

d. Scrierea sistemului liniar al ecuațiilor de corecții:

Pentru exemplul nostru vom folosi ca forme a ecuațiilor de corecție pe cele prezentate în relațiile (7.18) și (7.19) care corespund pentru direcții măsurate între două puncte vechi, respectiv între un punct vechi și un punct nou.

Coeficienții de direcție și termenii liberi vor fi calculați cu relațiile (7.21), respectiv (7.22). Termenii liberi vor fi exprimați în secunde.

Calculul coeficienților de direcție și al ponderilor

Tabel 7-13

Direcția	PUNCTE						Termen liber (cc)	Precizia înainte de compens.	P $\frac{c}{\sigma^2}$
	55 dz_{55}	59 dz_{59}	77 dz_{77}	63 dz_{63}	913 dx_{913}	913 dy_{913}			
55 – 59	- 1						- 0,1	20^{cc}	1
55 - 913	- 1				-18,3427	-22,2736	+ 1,7	20^{cc}	1
55 - 63	- 1						- 1,6	20^{cc}	1
59 - 77		- 1					- 5,2	20^{cc}	1
59 - 913		- 1			+17,0686	-53,6266	- 0,9	20^{cc}	1
59 - 55		-1					+ 6,1	20^{cc}	1
77 - 63			- 1				- 0,6	20^{cc}	1
77 - 913			- 1		+14,2353	+39,5984	+ 1,1	20^{cc}	1
77 - 59			- 1				- 0,5	20^{cc}	1
63 - 55				- 1			- 4,1	20^{cc}	1
63 - 913				- 1	-49,6583	+56,9070	+ 3,2	20^{cc}	1
63 - 77				- 1			+ 0,9	20^{cc}	1

Prin alegerea constantei c = 400 ponderile observațiilor devin egale cu 1 (s-a considerat că avem observații de aceeași precizie), astfel că în continuare ne situăm în cazul măsurătorilor indirecte neponderate.

Matricea de configurație a rețelei și vectorul termenilor liberi vor fi:

$$A=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -18,3427 & -22,2736 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 17,0686 & -53,6266 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 14,2353 & 39,5984 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -49,6583 & 56,907 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad TL^{cc}=\begin{vmatrix} -0,1 \\ 1,7 \\ -1,6 \\ -5,2 \\ -0,9 \\ 6,1 \\ -0,6 \\ 1,1 \\ -0,5 \\ -4,1 \\ 3,2 \\ 0,9 \end{vmatrix}$$

(7.51)

Matricea sistemului normal:

$$N=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 18,3427 & 22,2736 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -17,0686 & 53,6266 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -14,2353 & -39,5984 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 49,6583 & -56,907 \\ 18,3427 & -17,0686 & -14,2353 & 49,6583 & 3296,382 & -2768,98 \\ 22,2736 & 53,6266 & -39,5984 & -56,907 & -2768,983 & 8178,365 \end{vmatrix}$$

(7.52)

Termenii liberi normalizați

$$n=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -189,7921 \\ 236,0595 \end{vmatrix} \qquad (7.53)$$

Matricea de cofactori:

$$N^{-1}=\begin{vmatrix} 0,390781 & 0,026332 & -0,06853 & 0,029749 & -0,00549 & -0,00322 \\ 0,026332 & 0,392023 & -0,0454 & -0,05985 & -0,00023 & -0,00336 \\ -0,06853 & -0,0454 & 0,419276 & -0,01343 & 0,005859 & 0,004405 \\ 0,029749 & -0,05985 & -0,01343 & 0,464587 & -0,00644 & 0,001298 \\ -0,00549 & -0,00023 & 0,005859 & -0,00644 & 0,000636 & 0,000215 \\ -0,00322 & -0,00336 & 0,004405 & 0,001298 & 0,000215 & 0,000256 \end{vmatrix} \qquad (7.54)$$

Vectorul parametrilor şi vectorul corecţiilor:

$$X=\begin{bmatrix} -0,28^{cc} \\ +0,75^{cc} \\ +0,07^{cc} \\ -1,53^{cc} \\ +0,07dm \\ -0,02dm \end{bmatrix} \qquad (7.55) \qquad V^{cc}=\begin{bmatrix} +0,2^{cc} \\ +1,1^{cc} \\ -1,3^{cc} \\ -5,9^{cc} \\ +0,6^{cc} \\ +5,4^{cc} \\ -0,7^{cc} \\ +1,2^{cc} \\ -0,6^{cc} \\ -2,6^{cc} \\ +0,1^{cc} \\ +2,4^{cc} \end{bmatrix} \qquad (7.56)$$

Corectarea direcțiilor măsurate:

Tabel 7-14

PS	PV	Direcții măsurate	Corecții cc	Direcții corectate
Δ 55	59	382.72.89	0,2	382.72.89
	913	16.97.64	1,1	16.97.65
	63	38.67.68	-1,3	38.67.67
Δ 59	77	309.91.36	-5,9	309.91.30
	913	333.81.75	0,6	333.81.76
	55	36.09.40	5,4	36.09.45
Δ 77	63	14.87.71	-0,7	14.87.70
	913	52.35.90	1,2	52.35.91
	59	70.04.22	-0,6	70.04.21
Δ 63	55	284.09.89	-2,6	284.09.86
	913	351.93.22	0,1	351.93.22
	77	46.80.40	2,4	46.80.42

Coordonatele cele mai probabile pentru punctul 913 sunt:

$$X = X' + dx = 8429{,}967 + 0{,}007 = 8429{,}974$$
$$Y = Y' + dy = 8361{,}688 - 0{,}002 = 8361{,}686 \qquad (7.57)$$

Calcule de precizie:

- abaterea standard empirică a unității de pondere:

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{V^T V}{n-h}} = \pm\sqrt{\frac{82{,}30366}{12-6}} = \pm 3{,}70 \qquad (7.58)$$

- erorile individuale ale coordonatelor punctului nou 913:

$$\sigma_{X_{101}} = \pm\sigma_0\sqrt{Q_{XX}} = \left(3{,}70\sqrt{0{,}000636}\right)\text{dm} = \pm 0{,}93\text{cm}$$
$$\sigma_{Y_{101}} = \pm\sigma_0\sqrt{Q_{YY}} = \left(3\sqrt{0.0164}\right)\text{dm} = \pm 1.67\text{ cm} \qquad (7.59)$$

- elipsa erorilor punctului nou determinat 913:

$$a = 1{,}0\text{ cm}$$
$$b = 0{,}47\text{ cm} \qquad (7.60)$$
$$\varphi = 22^G00^C$$

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

[1] Atudorei M. — Măsurători geodezice prin unde – Institutul de Construcții, București, 1981

[2] Bonea I. — Curs de Topografie- Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963

[3] Costăchel A. Cristescu N. Mihail D. — Topografie- Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970

[4] Cristescu N. — Topografie inginerească – Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978

[5] Cristescu N., Ursea V., Neamțu M. Sebastian Taub M. — Topografie – Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980

[6] Deaconescu C. — Topografie și Desen Tehnic – Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979

[7] Deumlich F. — Instrumentenkunde der Vermessungstechnik – VFB Verlag, Berlin, 1980

[8] Dragomir P. — Topografie Generală – Institutul de Construcții, București, 1992

[9] Dragomir P., Mihăilescu D., Tămâioagă Gh., Țurcanu R, — Topografie Inginerească – Editura Conspress, București, 2000

[10] Dragomir V., ș.a. — Topografie Militară-Editura Militară, București, 1970

[11] Filimon R., Botez M., Costăchel A., Mihail D., Russu A. — Topografie Generală – Editura Tehnică, București, 1958

[12] Fotescu N . — Teoria Erorilor de Măsurare şi Metoda Celor mai mici Pătrate – Institutul de Construcţii, Bucureşti, 1978

[13] Fotescu N. Săvulescu C. — Îndrumător pentru lucrări practice la Teoria Erorilor- Institutul de Construcţii, Bucureşti, 1988

[14] Ghiţău D. — Geodezie şi Gravimetrie – Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

[15] Ghiţău D, — Geodezie – Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972

[16] Grobmann W., Kahmen H. — Vermessungskunde III – Walter de Gruyter, Berlin, 1988

[17] Gagea L. Nicolaescu Gh. — Calcule Topografice- Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972

[18] Henecke F., Verner H. — Ingenieur – Geodäsie, VEB Varlag für Bauwesen, Berlin, 1986

[19] Henecke F., Müller G., Verner H Kahmen H. — Handbuch Ingenieurvermessung Band 1 Grundlagen, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1993 Vermessungskunde – Walter de Gruyter, 1988

[20] Ionescu P., Rădulescu M. — Topografie Generală şi Inginerească – Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975

[21] Năstase A. — Cartografie – Topografie – Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

[22] Neamţu M., Ulea E., ş.a. — Instrumente topografice şi Geodezice – Editura Tehnică, Bucureşti, 1982

[23] Neamțu M., Onose D., Neuner J. — Măsurarea topografică a deplasărilor și și deformațiilor construcțiilor – Institutul de Construcții, București, 1988

[24] Neamțu M., Taub M. — Topografie vol I și II – Institutul de Construcții, București, 1979

[24a] Neuner J. — Sisteme de Poziționare Globală, Editura Matrix Rom, București, 2000

[25] Nistor Ghe. — Geodezie aplicată la studiul construcțiilor Editura Gheorghe Asachi, Iași, 1993

[26] Onose D., ș.a. — Măsurători Terestre- Fundamente- Editura Matrix Rom, București, 2001

[27] Popa E., Nistor Gheorghe, ș.a. — Topografie-Lucrări Practice-Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968

[28] Russu A., Bos N., Kiss A. — Topografie- Geodezie- Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982

[29] Russu A. — Topografie – Editura Tehnică, București, 1955

[30] Ulea E., Tămâioagă G., Onose D., Țurcanu R., Neuner J., Feldioren I. — Îndrumător pentru lucrări și Practică de Topografie, Institutul de Construcții București, 1984

[31] Posescu M. — Topografie, Institutul de Construcții București, 1993

[32] Ursea V., Dragomir P., Mihăilescu D.,Popescu M., Popescu D — Îndrumător pentru lucrări practice și proiect de topografie inginerească – Institutul de Construcții, București, 1986

[33] Witte B., Schmidt H. — Vermessungskunde für Bauingenieure, Verlag Konrad Wittwer, Stuutgard, 1991

[34] Zahan T., Chivulescu A., Pașcanu V — Topometrie pentru Organizarea Teritorului Agricol și Îmbunătățiri Funciare – Editura Agrosilvică de Stat, București, 1958

[35] *** — Instrucțiuni pentru nivelmentul de ordinele I, II, III și IV și cu teodolitul – Editura MFA, București, 1965

[36] *** — Manualul Inginerului Geodez – Editura Tehnică, București, 1971

[37] *** — Instrucțiuni pentru rețele de sprijin în localități, Buletin CSCAS anul II nr.22, București, 1961

[38] *** — Instrucțiuni pentru triangulația de ordinele I, II, III și IV – Editura MFA, București, 1962

[39] *** — Norme Tehnice pentru întocmirea planului topografic de bază la scările 1:2000, 1:5000, 1:10 000, București, 1991

CUPRINS

1. UTILIZAREA HĂRȚILOR ȘI PLANURILOR TOPOGRAFICE
1.1. Elementele topografice ale terenului 1
1.2. Jalonarea aliniamentelor 9
1.3. Hărți și planuri 14
1.4. Interpretarea hărților și planurilor 23
1.5. Probleme ce pot fi rezolvate pe hărți și pe planuri 27
1.5.1. Determinarea unor elemente de planimetrie 27
1.5.2. Determinarea unor elemente de altimetrie 31
1.5.3. Exemple. Utilizarea hărților și planurilor 37

2. RETELE DE SPRIJIN
2.1. Triangulația geodezică 43
2.1.1. Îndesirea triangulației geodezice 44
2.1.2. Realizarea rețelelor de ordin inferior 44
2.1.3. Schița vizelor 45
2.1.4.Căutarea și identificarea punctelor geodezice vechi 46
2.2. Rețele de triangulație locală 47
2.2.1. Operații preliminare 47
2.2.2. Proiectarea triangulației locale 47
2.2.3. Tipurile principale de rețele de triangulație locală 52
2.2.4. Operații de teren 55
2.2.4.1. Marcarea punctelor de planimetrie 55
2.2.4.2. Semnalizarea punctelor 57
2.2.4.3. Marcarea punctelor altimetrice 60
2.2.4.4. Efectuarea măsurătorilor liniare asupra bazei rețelei de triangulație 63
2.2.5. Operații de calcul 63

3. ÎNDESIREA REȚELELOR DE TRIANGULAȚIE
3.1. Principiile intersecțiilor 64
3.1.1. Tipuri și caracteristici ale intersecțiilor 65
3.1.2. Condiții de aplicare în teren pentru intersecția înainte 67
3.2. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înainte 69
3.2.1. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecție înainte. Procedeul analitic. 69
3.2.1.1. Orientarea vizelor în stații de coordonate cunoscute 72
3.2.1.2. Organizarea calculelor pentru intersecția înainte 75

3.2.1.3. Exemple. Orientarea vizelor în staţii de coordonate cunoscute 75
3.2.1.4. Exemple. Calculul coordonatelor punctelui 913 prin intersecţie înainte cu orientări. Procedeul analitic 86
3.2.1.5. Calculul coordonatelor punctelui 913 prin intersecţie înainte cu unghiuri. Procedeul analitic 88
3.2.2. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecţie înainte. Procedeul trigonometric 90
3.2.2.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului 926 Procedeul trigonometric. Metoda radierii 93
3.3. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecţie înapoi 99
3.3.1. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecţie înapoi Soluţia analitică (Procedeul Delambre) 99
3.3.2. Caz particular de intersecţie înapoi 105
3.3.3. Cazuri de nedeterminare la intersecţia înapoi 107
3.3.4. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului 101 prin intersecţie înapoi. Procedeul Delambre 111
3.3.5. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecţie înapoi Soluţia trigonometrică. Procedeul Kästner 115
3.3.5.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului 309 Procedeul Kästner 120
3.3.6. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecţie înapoi. Procedeul Collins. 127
3.3.6.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului 411 Procedeul Collins 129
3.3.7. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecţie înapoi Procedeul Hansen 133
3.3.7.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului de îndesire 666 şi 1226. Rezolvarea analitică 138
3.3.7.2. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului de îndesire 666 şi 1226. Rezolvarea trigonometrică 142
3.3.8. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecţie înapoi Procedeul Cassini-Martinian 146
3.3.8.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului de îndesire 202. Procedeul Cassini-Martinian 155
3.3.9. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecţie înapoi Procedeul Marek 157
3.3.9.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctelor de îndesire 808 şi 3861. Procedeul Marek. Rezolvarea analitică 162
3.3.9.2. Exemplu. Calculul coordonatelor punctelor de îndesire 808 şi 3861. Procedeul Marek. Rezolvarea trigonometrică 166

3.4. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin Procedeul intersecției generalizate înapoi 172
3.4.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctelor de îndesire 1001 și 1002. Procedeul intersecției înpoi generalizate 179
3.5. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecția laterală 183
3.6. Determinarea coordonatelor punctelor noi prin intersecția liniară 186
3.6.1. Exemplu. Calculul coordonatelor punctului de îndesire 1003 și 1004. Procedeul intersecției liniare 190
3.7. Observații asupra intersecțiilor 193
3.8. Câteva aspecte privind precizia interioară și exterioară în rețelele de sprijin 193
3.8.1. Semnificația geometrică a erorii medii a unui punct într-o rețea constrânsă 194
3.8.2. Semnificația geometrică a erorii medii a unui punct într-o rețea liberă 196
3.8.3. Concluzii 198
3.8.4. Rețele locale cu configurații speciale și criterii de apreciere a acestora 198
3.8.5. Criterii de apreciere a configurației rețelei la proiectare 200
3.8.5.1. Criteriul "încrederea" 201
3.8.5.2. Contributul la redundanța r_i 202
3.8.5.3. Încrederea interioară 202

4. TRANSMITEREA LA SOL A PUNCTELOR DE TRIANGULAȚIE ȘI ÎNDESIRE
4.1. Transmiterea la sol, cazul când punctul transmis la sol este staționabil 204
4.1.1. Exemplu. Transmiterea la sol a coordonatelor punctelor, punctul de triangulație este situat la înălțime și este staționabil 208
4.2. Transmiterea la sol, cazul când punctual transmis la sol este nestaționabil 213
4.2.1. Exemplu. Transmiterea la sol a coordonatelor punctelor, punctul de triangulație este situat la înălțime și nu este accesibil 217

5. TRANSCALCULAREA COORDONATELOR
5.1. Transcalcularea geometrică 222
5.1.1. Exemplu. Transcalcularea geometrică a coordonatelor punct cu punct 225
5.1.2. Exemplu. Transcalcularea geometrică a coordonatelor în serie 225
5.2. Transcalcularea topografică

5.2.1. Procedeul clasic 228
5.2.1.1. Exemplu. Transcalcularea topografică a coordonatelor. Tratare clasică 234
5.2.2. Transcalcularea din sistem topografic în sistem geodezic prin utilizarea teoriei celor mai mici pătrate 237
5.2.2.1. Exemplu. Transcalcularea topografică a coordonatelor. Tratare matricială 242
5.3. Transcalcularea din « Sistem de Proiecție Stereografic 1970» în Sistem de proiecție «Stereografic Local» 246
5.3.1. Exemplu. Transcalcularea din « Sistem de Proiecție Stereografic 1970» în Sistem de proiecție «Stereografic Local» 247

6. RETELE DE RIDICARE
6.1. Rețele de ridicare planimetrică. Clasificări 250
6.2. Proiectarea rețelelor de drumuiri 253
6.2.1. Operații de teren 254
6.3. Drumuiri planimetrice 256
6.3.1. Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute și laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea prin metoda clasică 256
6.3.1.1. Exemplu. Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute și laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea prin metoda clasică 260
6.3.2. Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute și laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea prin metoda rotației și punerii în scară 270
6.3.2.1. Exemplu. Drumuire sprijinită la capete pe puncte de coordonate cunoscute și laturi cu orientări cunoscute. Prelucrarea prin metoda rotației și punerii în scară 273
6.3.3. Drumuirea cu punct nodal 281
6.3.3.1. Exemplu. Drumuirea cu punct nodal 286
6.3.4. Drumuirea închisă pe punctul de plecare 299
6.3.5. Drumuirea sprijinită la capete numai pe puncte de coordonate cunoscute 303
6.3.6. Găsirea greșelilor la o drumuire planimetrică 307
6.3.6.1. Identificarea unei greșeli de măsurare a unui unghi 308
6.3.6.2. Identificarea unei greșeli de măsurare a lungimilor 308
6.4. Ridicarea planimetrică a detaliilor topografice 310
6.4.1. Metoda radierii (metoda coordonatelor polare) 310

6.4.2. Metoda coordonatelor rectangulare (se aplică în terenuri cu panta $\alpha \leq 5^g$) 311
6.4.3. Ridicarea detaliilor prin intersecție liniară 312
6.4.4. Ridicarea detaliilor prin intersecție unghiulară 314
6.5. Rețele de ridicare altimetrică 315
6.5.1. Drumuirea de nivelment geometric sprijinită la capete 315
6.5.1.1. Exemplu. Drumuirea de nivelment geometric sprijinită la capete 318
6.5.2. Drumuirea de nivelment geometric cu punct nodal 321
6.5.2.1. Exemplu. Drumuirea de nivelment geometric cu punct nodal 324
6.6. Nivelmentul trigonometric 334
6.6.1. Generalități 334
6.6.2. Metode de nivelment trigonometric 337
6.6.2.1. Metoda drumuirii de nivelment trigonometric 337
6.6.2.2. Metoda radierii de nivelment trigonometric 339
6.6.2.3. Ponderea într-o drumuire de nivelment trigonometric 339
6.6.2.4. Precizia în nivelmentul trigonometric 342

7. COMPENSĂRI RIGUROASE
7.1. Compensarea riguroasă a unei drumuiri planimetrice prin metoda măsurătorilor indirecte 344
7.1.1. Exemplu. Compensarea riguroasă a unei drumuiri planimetrice prin metoda măsurătorilor indirecte 347
7.2. Compensarea riguroasă în cazul determinării unui punct prin intersecție înainte 354
7.2.1. Exemplu. Compensarea riguroasă a coordonatelor punctului 913 determinat prin intersecție înainte 356

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ 363
CUPRINS 367

CĂRȚI TEHNICE - MATRIX ROM - CĂRȚI ACADEMICE
11 ani de activitate - peste 1200 de titluri

În domeniul **GEODEZIE - TOPOGRAFIE*** au mai apărut:

- Marcel Costel Brişan (Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti) - **TOPOGRAFIE**• Preț: 95000 lei
- Constantin Coşarcă (Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti) – **TOPOGRAFIE INGINEREASCĂ** • Preț: 160000 lei
- Facultatea de Geodezie din Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti - **MĂSURĂTORI TERESTRE. FUNDAMENTE VOL. 1, 2, 3** • Preț: 610000 lei
- Constantin Moldoveanu (Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti) – **GEODEZIE** • Preț: 260000 lei
- Constantin Munteanu (Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti) – **CARTOGRAFIE MATEMATICĂ** • Preț: 130000 lei
- Manuela Nicolae-Posescu (Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti) - **TOPOGRAFIE vol. 1**• Preț: 140000 lei
- Manuela Nicolae-Posescu (Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti) - **TOPOGRAFIE vol.3**• Preț: 60000 lei
- Dumitru Onose (Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti) - **TOPOGRAFIE**
- Ion Gr. Sion (Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti) - **INSTITUȚII DE DREPT ŞI LEGISLAȚIE FUNCIAR CADASTRALĂ** vol. 1+2 • Preț: 360000 lei

Ofertele complete şi gratuite pe domenii se pot solicita telefonic. Achiziționarea cărților se poate face direct de la sediul editurii, prin colet poştal cu plata ramburs (pe baza unei comenzi scrise) sau de la distribuitorii din Bucureşti (librăria RAMA, librăria 164, librăria AGIR, librăria Luceafărul), Bacău, Braşov, Cluj Napoca, Constanța, Craiova, Galați, Iaşi, Piteşti, Sibiu, Târgu Jiu, Timişoara. Clienții primesc periodic informații despre noile lucrări apărute sau în curs de apariție.

* Prețurile din această listă sunt prețuri de vânzare directă, valabile începând cu 01.07.2004 şi includ TVA.